Q1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja W um subespaço não nulo de V tal que $W \neq V$ e seja $T : V \to V$ o operador linear definido por:

$$T(v) = -v + 2\,\mathrm{proj}_W\, v,$$

para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é simétrico;

(II) os autovalores de T são 1 e -1;

(III) os autovalores de T são 2 e 1.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q2. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $1 + i$ seja um autovalor de A e tal que o autoespaço de A correspondente a esse autovalor seja igual a:

$$[(1, i, 0, 0), (0, 0, 1, 2 - i)].$$

Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1, 0, 1)$. Temos que $X(\pi)$ é igual a:

(a) $e^{\pi}(0, -1, 0, -1)$;

(b) $e^{\pi}(-1, -1, 0, 0)$;

(c) $e^{\pi}(1, 0, -1, 0)$;

(d) $e^{2\pi}(0, 1, 0, -1)$;

(e) $e^{2\pi}(-1, 0, 0, 1)$.

Q3. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$x^2 - 2axy + y^2 - 1 = 0,$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) se $a > 0$, então o conjunto solução dessa equação não é uma elipse;

(b) se $0 < a < \frac{1}{2}$, então o conjunto solução dessa equação é uma elipse;

(c) se $a > 2$, então o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes;

(d) se $\frac{1}{2} < a < 2$, então o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole;

(e) existe $a > 0$ tal que o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Q4. Seja n um inteiro positivo e sejam $A, M \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se A é simétrica e $M^{\mathrm{t}}AM$ é diagonal, então $M^{\mathrm{t}}M$ é igual à matriz identidade;

(II) se $M^{\mathrm{t}}M$ é igual à matriz identidade, então as colunas de M constituem uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ com respeito ao produto interno usual;

(III) se A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então existe uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ com $\det(P) = 1$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q5. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Seja $d \in \mathbb{R}$ e considere a equação:

$$9x^2 + 6y^2 - 4xy - 12x - 4y - 8 + d = 0.$$

Se $d < 14$, então o conjunto solução dessa equação é:

(a) uma hipérbole;
(b) uma parábola;
(c) o conjunto vazio;
(d) uma elipse;
(e) um par de retas concorrentes.

Q6. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$$

seja diagonalizável. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1, 1)$. Se

$$X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

então $x(t) + y(t) + z(t)$ é igual a:

(a) $2e^{2t}$;
(b) $2e^{t}$;
(c) $3e^{2t} - e^{t}$;
(d) $3e^{t} - e^{2t}$;
(e) $e^{t} + e^{2t}$.

Q7. Seja $\big(x(t), y(t)\big)$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t), \\ y'(t) = 4x(t) + 9y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição $\big(x(0), y(0)\big) = (-2, 1)$. Temos que $x(t) + 2y(t)$ é igual a:

(a) 0;
(b) $e^{t} + 2e^{3t}$;
(c) $e^{-t} + 2e^{t}$;
(d) $e^{-t} + 3e^{11t}$;
(e) $2e^{t} + e^{-11t}$.

Q8. Sejam n um inteiro positivo, $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear e seja $A = [T]_{\mathrm{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$. Suponha que a matriz A tenha entradas reais. Seja $\lambda = a+bi \in \mathbb{C}$ um autovalor de T, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Seja $w = u+vi \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de T correspondente ao autovalor λ, onde $u, v \in \mathbb{R}^n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T tem pelo menos um autovalor real;

(II) T é diagonalizável;

(III) no espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, o conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = -(t-2)^2(t-3)$ e que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [(1, -1, 0), (1, 0, 1)],$$

onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(2, 2, -2)$ é igual a:

(a) $(-6, 6, -6)$;

(b) $(-4, 4, -4)$;

(c) $(2, 2, -2)$;

(d) $(4, 4, -4)$;

(e) $(6, 6, -6)$.

Q10. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica tal que

$$A \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e suponha que A possua um autovalor não nulo $\lambda \in \mathbb{R}$. O autoespaço de A correspondente ao autovalor λ é igual a:

(a) $[(11, 0, 0)]$;

(b) $[(1, -1, 3)]$;

(c) $\{0\}$;

(d) $[(-3, 0, 1), (1, 1, 0)]$;

(e) $[(-2, 1, 1)]$.

Q11. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{60} é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{60} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{60} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q12. O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t-2)^2(t+1)$ e o autoespaço de A correspondente ao autovalor 2 é $[(-1,1,0),(1,0,1)]$. Considere a quádrica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 1 = 0.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que

$$2u^2 + 2v^2 - w^2 = \alpha$$

é uma equação reduzida para essa quádrica, então α é igual a:

(a) -2;
(b) 1;
(c) 0;
(d) -1;
(e) 2.

Q13. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico tal que $T^2 = T$. Denote por I o operador identidade de V. Pode-se afirmar que:

(a) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T)$;
(b) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a V;
(c) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{I})$;
(d) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ não é um autoespaço de T;
(e) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$.

Q14. Sejam $a, b, p, E, F, G \in \mathbb{R}$ e considere a cônica de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2pxy + Ex + Fy + G = 0.$$

Suponha que a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

transforme essa equação em:

$$2u^2 - v^2 + \alpha u + \beta v + \gamma = 0,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix} X(t)$$

que satisfaz a condição $X(0) = (2, 0)$. Temos que $2X(\ln 2)$ é igual a:

(a) $(0, 4)$;
(b) $(9, 7)$;
(c) $(-3, -5)$;
(d) $(15, 17)$;
(e) $(1, 3)$.

Q15. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ um operador linear e seja $A = [T]_{\text{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$. Suponha que A tenha entradas reais e que $\operatorname{Ker}\big(T - (2+i)\mathrm{I}\big) = [(i, 1)]$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{C}^2$. Temos que $\det(A)$ é igual a:

(a) 1;
(b) 5;
(c) 0;
(d) -5;
(e) -1.

Q16. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Sejam $T : V \to V$ um operador linear simétrico e W um subespaço de V tal que $T(w) \in W$, para todo $w \in W$. Suponha que $W \neq V$ e que $v \in V$ é tal que $W^{\perp} = [v]$. Pode-se afirmar que:

(a) v é um autovetor de T se, e somente se, T^2 é igual ao operador identidade de V;
(b) v é um autovetor de T;
(c) v é um autovetor de T se, e somente se, $T^2 = T$;
(d) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = v$;
(e) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = -v$.