

Q1. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$$

seja diagonalizável. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1, 1)$. Se

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

então $x(t) + y(t) + z(t)$ é igual a:

- (a) $3e^t - e^{2t}$;
- (b) $3e^{2t} - e^t$;
- (c) $2e^t$;
- (d) $e^t + e^{2t}$;
- (e) $2e^{2t}$.

Q2. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = -(t-2)^2(t-3)$ e que

$$\text{Ker}(T - 2I) = [(1, -1, 0), (1, 0, 1)],$$

onde I denota o operador identidade de \mathbb{R}^3 . Temos que $T(2, 2, -2)$ é igual a:

- (a) $(-4, 4, -4)$;
- (b) $(2, 2, -2)$;
- (c) $(-6, 6, -6)$;
- (d) $(6, 6, -6)$;
- (e) $(4, 4, -4)$.

Q3. Seja $(x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t), \\ y'(t) = 4x(t) + 9y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$. Temos que $x(t) + 2y(t)$ é igual a:

- (a) $e^{-t} + 2e^t$;
- (b) $e^t + 2e^{3t}$;
- (c) 0 ;
- (d) $e^{-t} + 3e^{11t}$;
- (e) $2e^t + e^{-11t}$.

Q4. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico e W um subespaço de V tal que $T(w) \in W$, para todo $w \in W$. Suponha que $W \neq V$ e que $v \in V$ é tal que $W^\perp = [v]$. Pode-se afirmar que:

- (a) v é um autovetor de T se, e somente se, T^2 é igual ao operador identidade de V ;
- (b) v é um autovetor de T ;
- (c) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = -v$;
- (d) v é um autovetor de T se, e somente se, $T^2 = T$;
- (e) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = v$.

Q5. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico tal que $T^2 = T$. Denote por I o operador identidade de V . Pode-se afirmar que:

- (a) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a $\text{Ker}(T + I)$;
- (b) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a $\text{Ker}(T)$;
- (c) $(\text{Ker}(T))^\perp$ não é um autoespaço de T ;
- (d) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a $\text{Ker}(T - I)$;
- (e) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a V .

Q6. Sejam $a, b, p, E, F, G \in \mathbb{R}$ e considere a cônica de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2pxy + Ex + Fy + G = 0.$$

Suponha que a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

transforme essa equação em:

$$2u^2 - v^2 + \alpha u + \beta v + \gamma = 0,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix} X(t)$$

que satisfaz a condição $X(0) = (2, 0)$. Temos que $2X(\ln 2)$ é igual a:

- (a) $(-3, -5)$;
- (b) $(15, 17)$;
- (c) $(0, 4)$;
- (d) $(1, 3)$;
- (e) $(9, 7)$.

Q7. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja W um subespaço não nulo de V tal que $W \neq V$ e seja $T : V \rightarrow V$ o operador linear definido por:

$$T(v) = -v + 2 \operatorname{proj}_W v,$$

para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) o operador T é simétrico;
- (II) os autovalores de T são 1 e -1 ;
- (III) os autovalores de T são 2 e 1.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q8. Seja n um inteiro positivo e sejam $A, M \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se A é simétrica e $M^t A M$ é diagonal, então $M^t M$ é igual à matriz identidade;
- (II) se $M^t M$ é igual à matriz identidade, então as colunas de M constituem uma base ortonormal de \mathbb{R}^n com respeito ao produto interno usual;
- (III) se A é diagonalizável sobre \mathbb{R} , então existe uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ com $\det(P) = 1$ tal que $P^{-1} A P$ seja uma matriz diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q9. O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t-2)^2(t+1)$ e o autoespaço de A correspondente ao autovalor 2 é $[(-1, 1, 0), (1, 0, 1)]$. Considere a quádrlica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 1 = 0.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que

$$2u^2 + 2v^2 - w^2 = \alpha$$

é uma equação reduzida para essa quádrlica, então α é igual a:

- (a) -1 ;
- (b) -2 ;
- (c) 1 ;
- (d) 2 ;
- (e) 0 .

Q10. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$x^2 - 2axy + y^2 - 1 = 0,$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- (a) se $0 < a < \frac{1}{2}$, então o conjunto solução dessa equação é uma elipse;
- (b) se $a > 0$, então o conjunto solução dessa equação não é uma elipse;
- (c) se $a > 2$, então o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes;
- (d) existe $a > 0$ tal que o conjunto solução dessa equação é uma parábola;
- (e) se $\frac{1}{2} < a < 2$, então o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.

Q11. Sejam n um inteiro positivo, $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um operador linear e seja $A = [T]_{\text{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo \mathbb{C}^n . Suponha que a matriz A tenha entradas reais. Seja $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ um autovalor de T , onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Seja $w = u + vi \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de T correspondente ao autovalor λ , onde $u, v \in \mathbb{R}^n$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T tem pelo menos um autovalor real;
- (II) T é diagonalizável;
- (III) no espaço vetorial real \mathbb{R}^n , o conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q12. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica tal que

$$A \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e suponha que A possua um autovalor não nulo $\lambda \in \mathbb{R}$. O autoespaço de A correspondente ao autovalor λ é igual a:

- (a) $[(11, 0, 0)]$;
- (b) $[(-2, 1, 1)]$;
- (c) $\{0\}$;
- (d) $[(-3, 0, 1), (1, 1, 0)]$;
- (e) $[(1, -1, 3)]$.

Q13. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $1 + i$ seja um autovalor de A e tal que o autoespaço de A correspondente a esse autovalor seja igual a:

$$[(1, i, 0, 0), (0, 0, 1, 2 - i)].$$

Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1, 0, 1)$. Temos que $X(\pi)$ é igual a:

- (a) $e^\pi(-1, -1, 0, 0)$;
- (b) $e^{2\pi}(0, 1, 0, -1)$;
- (c) $e^\pi(0, -1, 0, -1)$;
- (d) $e^{2\pi}(-1, 0, 0, 1)$;
- (e) $e^\pi(1, 0, -1, 0)$.

Q14. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Seja $d \in \mathbb{R}$ e considere a equação:

$$9x^2 + 6y^2 - 4xy - 12x - 4y - 8 + d = 0.$$

Se $d < 14$, então o conjunto solução dessa equação é:

- (a) uma parábola;
- (b) um par de retas concorrentes;
- (c) o conjunto vazio;
- (d) uma hipérbole;
- (e) uma elipse.

Q15. Seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ um operador linear e seja $A = [T]_{\text{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo \mathbb{C}^2 . Suponha que A tenha entradas reais e que $\text{Ker}(T - (2 + i)\mathbf{I}) = [(i, 1)]$, onde \mathbf{I} denota o operador identidade de \mathbb{C}^2 . Temos que $\det(A)$ é igual a:

- (a) 0;
- (b) -1;
- (c) 5;
- (d) 1;
- (e) -5.

Q16. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{60} é igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{60} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{60} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} \end{pmatrix}$;
- (d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.