

Q1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^4$, $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz e $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos autoespaços de T é igual a 4;
- (II) se A é simétrica, então T é simétrico;
- (III) se uma das colunas de A for uma combinação linear das outras colunas de A , então $\text{Ker}(T)$ tem dimensão maior ou igual a 1.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Resposta (a):

(I) verdadeira: por teorema, se E tem dimensão n , T é diagonalizável se e somente se a soma das dimensões dos autoespaços (ou espaços próprios) de T vale n . Isso é condição necessária e suficiente para existir uma base de autovetores.

(II) falsa: T é simétrico se e somente se a matriz de T é simétrica em base **$\mathcal{B}$ ortonormal**. Aqui a base $\mathcal{B}$ é qualquer.

(III) verdadeira: se uma das colunas de A é CL das outras isso significa que $\det(A) = 0$, ou ainda que A não é inversível, o que em dimensão finita, equivale a T não injetora ou ainda $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Q2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que:

$$\text{Ker}(T - I) = [(1, 1, 0)], \quad \text{Ker}(T - 2I) = [(0, 0, 1)]$$

e $(1, -1, 0) \in \text{Ker}(T)$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Se A é a matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{R}^3$, então:

- (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$;
- (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1};$$

$$(e) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta a): Do enunciado temos que $V(2) = [(0, 0, 1)]$, $V(1) = [(1, 1, 0)]$, $V(0) = \text{Ker}(T) = [(1, -1, 0)]$ logo 2, 1, 0 são autovalores de multiplicidade 1, e como a soma das dimensões desses três autoespaços é 3, T é diagonalizável e A é semelhante à matriz diagonal D com entradas, por exemplo, 2, 0, 1. A matriz M tal que $A = MDM^{-1}$ é a matriz de mudança de base $M_{can,B}$ onde can é a base canônica e B a base de autovetores de valores 2, 0, 1, nessa ordem. As colunas de M são os vetores definindo $V(2), V(0), V(1)$, escritos na base can .

Q3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) nenhuma dessas três matrizes é semelhante a qualquer uma das outras duas;
- (b) as três matrizes são semelhantes;
- (c) A e B são semelhantes, mas C não é semelhante a A ;
- (d) A e C são semelhantes, mas B não é semelhante a A ;
- (e) B e C são semelhantes, mas A não é semelhante a B .

Resposta a) Observe que $\det(A) = \det(B) = 12$ e $\det(C) = -12$, logo C não é semelhante a A ou B . Os autovalores de A e B são 3 simples e 2 dupla. Para A , $V(2)$ tem como equação $x = 0$, portanto tem dimensão 2. Para B , $V(2)$ tem como equação $x = z = 0$, portanto tem dimensão 1. Logo A e B não são semelhantes. Na verdade A é diagonalizável e B não o é.

Q4. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x + x^2, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(x^2 - x + 1)$ é igual a:

- (a) $(2, -8)$;
- (b) $(5, -3)$;
- (c) $(5, 3)$;
- (d) $(-2, -8)$;
- (e) $(-5, -3)$.

Resposta a) Pela matriz temos que $T(1) = (3, 1)_C$, $T(x+x^2) = (0, 2)_C$, $T(x^2) = (1, -1)_C$. Logo

$$T(x^2 - x + 1) = T(2x^2 - (x + x^2) + 1) = 2T(x^2) - T(x) + T(1) = (2(1, -1) - (0, 2) + (3, 1))_C = (5, -3)_C \text{ e segue que } T(x^2 - x + 1) = 5(1, -1) - 3(1, 1) = (2, -8).$$

Q5. Considere o espaço vetorial $C(\mathbb{R})$ das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e seja V o subespaço de $C(\mathbb{R})$ dado por:

$$V = [e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 2].$$

Seja $T : V \rightarrow V$ o operador linear definido por $T(f) = f'$, para toda $f \in V$, e seja $\mathcal{B}$ o subconjunto de V dado por:

$$\mathcal{B} = \{e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 1\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- (b) $\mathcal{B}$ não é uma base de V porque $\mathcal{B}$ não gera V ;
- (c) $\mathcal{B}$ não é uma base de V porque $\mathcal{B}$ não é linearmente independente;
- (d) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- (e) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Resposta a)

$$V = [e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 2] = [e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 1],$$

então B gera V . Além disso B é LI: de fato se $ae^{2x} \cos x + be^{2x} \sin x + c1 = 0$ então colocando $x = 0$: $a + c = 0$, colocando $x = \pi$: $-ae^{2\pi} + c = 0$, das duas equações podemos deduzir $a = c = 0$ e logo, colocando $x = \pi/2$, $b = 0$. Isso prova que B é base. A matriz de T em B será $(3, 3)$. Calcula-se $T(e^{2x} \cos x) = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = (2, -1, 0)_B$,

$$T(e^{2x} \sin x) = e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x = (1, 2, 0)_B, \text{ e}$$

$$T(1) = 0 = (0, 0, 0)_B,$$

que são as colunas da matriz.

Q6. Seja V um espaço vetorial de dimensão 7 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para todos $v, w \in V$, vale que $\langle v, T(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle$;
- (II) se I denota o operador identidade de V e $\text{Ker}(T+I)$ tem dimensão 2, então o polinômio $(t+1)^2$ é um divisor do polinômio característico de T ;
- (III) não existe um subespaço W de V tal que $\dim(W) = 6$ e tal que $T(v) = \text{proj}_W v$, para todo $v \in V$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Resposta a): (I) é verdadeira, por definição de um operador simétrico.

(II) é verdadeira para qualquer operador T . A hipótese diz que a multiplicidade geométrica do valor próprio -1 é 2. Por teorema, a multiplicidade algébrica será maior ou igual à geométrica, logo maior ou igual a 2. Isso significa que -1 é raiz pelo menos dupla de p_T , ou seja $(t+1)^2$ é divisor de p_T .

(III) é falsa. De fato sabemos que qualquer projeção ortogonal sobre um subespaço de V é um operador simétrico. No caso a matriz numa base de V formada de uma base ortonormal de W (com 6 vetores) e de um vetor de norma 1 de $W^\perp$ será diagonal, as entradas na diagonal sendo 1 seis vezes e -1 no canto inferior direito.

Q7. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 37 e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se T é sobrejetor, então 0 não é um autovalor de T ;
- (II) se $v \in V$ é um autovetor de T correspondente a um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in V$ é um autovetor de T correspondente a um autovalor $\mu \in \mathbb{R}$, então $v + w = 0$ ou $v + w$ é um autovetor de T correspondente ao autovalor $\lambda + \mu$;
- (III) T tem pelo menos um autovalor e no máximo 37 autovalores.

Assinale a alternativa correta:

Resposta a): (I) é verdadeira: se V tem dimensão finita e $T : V \rightarrow V$, T é sobrejetor se e somente se é injetor, se e somente se $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Como $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T - 0Id)$ isso significa que 0 não é autovalor.

(II) é falsa: temos $T(v) = \lambda v$ e $T(w) = \mu w$ logo $T(v+w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \mu w$ que é diferente em geral de $(\lambda + \mu)(v + w) = \lambda v + \mu w + \lambda w + \mu v$.

(III) é verdadeiro. Um operador T em V de dimensão n tem no máximo n autovalores. Além disso os autovalores são as raízes de p_T que tem grau n . Aqui $n = 37$ é ímpar, logo p_T tem pelo menos uma raiz, ou seja T tem pelo menos um autovalor.

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q8. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0)\}$$

dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[F]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e seja $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$G(x, y, z) = (z, x - y, y - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Se can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então a soma das entradas da diagonal principal da matriz $[G \circ F]_{\mathcal{B}, \text{can}}$ é igual a:

- (a) -4 ;
- (b) 0 ;
- (c) 4 ;
- (d) 6 ;
- (e) 8 .

Resposta a). Pela fórmula da matriz de composta temos

$$[G \circ F]_{\mathcal{B}, \text{can}} = [G]_{\text{can}, \text{can}} [F]_{\mathcal{B}, \text{can}} = [G]_{\text{can}} [F]_{\mathcal{B}, \text{can}}.$$

Pela expressão de $G(x, y, z)$ note que

$$[G]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar $[F]_{\mathcal{B}, \text{can}}$, calcule $F(1) = (2, 2, 0)_C$ (primeira coluna da matriz $[F]_{\mathcal{BC}}$) logo $F(1) = 2(1, 1, 1) + 2(1, 1, 0) = (4, 4, 2) = (4, 4, 2)_{\text{can}}$. Da mesma maneira

$$F(x) = (-1, 2, -1)_C = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, 0) - (0, -1, 0) = (1, 2, -1) = (1, 2, -1)_{\text{can}},$$

$$F(x^2) = (2, 0, 3)_C = 2(1, 1, 1) + 3(0, -1, 0) = (2, -1, 2) = (2, -1, 2)_{\text{can}}.$$

$$\text{Logo } [F]_{B, \text{can}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$[G \circ F]_{B, \text{can}} = [G]_{\text{can}} [F]_{B, \text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

e a soma das entradas da diagonal principal é -4 .

Q9. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = t(t-a)(t+3)^2$. Denote por I o operador identidade de $P_3(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 1$, então T não é diagonalizável;
- (II) se $a = 4$, então T é diagonalizável;
- (III) se $a = 0$, $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 2$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 3$, então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Resposta a).

(I) é verdadeira, pois a multiplicidade geométrica do autovalor -3 de T é $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 1$ que é menor que a multiplicidade algébrica do autovalor -3 de T que é maior ou igual que 2 (se $a = -3$ seria 3).

(II) é falsa, pois, de novo, a multiplicidade geométrica do autovalor -3 de T é $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 1$ que é menor que a multiplicidade algébrica do autovalor -3 de T que é exatamente 2.

(III) é falsa. Se $\dim(\text{Im}(T)) = 3$, como $\dim(P_3(\mathbb{R})) = 4$, temos que $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$. Logo a multiplicidade geométrica do autovalor 0 de T é 1. A multiplicidade algébrica do autovalor 0 de T é 2, pois $a = 0$. Portanto, como as multiplicidades geométrica e algébrica do autovalor 0 são diferentes, temos que T não é diagonalizável.

Q10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $b = -9$, $a \neq 5$ e $a \neq 3$, então A é diagonalizável;
- (II) se $b = 4$, $a \neq -3$ e $a \neq 1$, então A é diagonalizável;
- (III) se $b = 1$ e $a = -2$, então A é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Resposta a).

Primeiro calculamos o polinômio característico de A .

$$\begin{aligned}\det(A - tI) &= \det \begin{pmatrix} a-t & b & 0 \\ 1 & a-t & 0 \\ 0 & 1 & -1-t \end{pmatrix} \\ &= -(1+t) \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ 1 & a-t \end{pmatrix} \\ &= -(1+t)(t^2 - 2at + a^2 - b).\end{aligned}$$

Assim as raízes do polinômio característico são -1 , $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$.

(I) Se b for negativo temos que A não é diagonalizável porque não todas as raízes são reais. Isso implica que (I) é falso.

(II) Se $b = 4$, $a \neq -3$ e $a \neq 1$, temos que as três raízes são reais e diferentes. Logo A é diagonalizável e (II) é verdadeiro.

(III) Suponha que $b = 1$ e $a = -2$. Então -1 é uma raiz dupla do polinômio característico. Para saber se A é diagonalizável devemos calcular $\dim(\text{Ker}(A + I))$.

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\dim(\text{Ker}(A+I)) = 1$, pois no sistema homogêneo com matriz de coeficientes $A + I$, temos uma variável livre só. Resumindo a multiplicidade geométrica de -1 é 1 e a multiplicidade algébrica de -1 é 2. Logo (III) é falso.

Q11. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A soma das entradas da diagonal principal de A^{253} é igual a:

- (a) $3^{253} + 9^{253}$;
- (b) $-3^{253} - 9^{253}$;
- (c) $-3^{253} + 9^{253}$;

(d) $3 + 9^{253}$;

(e) $3^{253} - 9$.

Resposta a).

Mostraremos que A é diagonalizável e aproveitaremos isso para calcular A^{253} .

Calculamos o polinômio característico de A .

$$\det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 7-t & 4 \\ 2 & 5-t \end{pmatrix} = t^2 - 12t + 27 = (t-3)(t-9).$$

Como as duas raízes são simples e diferentes, temos que A é diagonalizável.

Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$. Vamos encontrar uma base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{D}}$ seja diagonal. Para isso devemos encontrar bases de $\text{Ker}(T - 3I)$ e $\text{Ker}(T - 9I)$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - 9I = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Logo $\text{Ker}(T - 3I) = [(1, -1)]$ e $\text{Ker}(T - 9I) = [(2, 1)]$. Seja $\mathcal{D}$ a base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{D} = ((1, -1), (2, 1))$. Então temos que

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Então temos que

$$A = [T]_{\text{can}} = [I]_{\mathcal{D}\text{can}}[T]_{\mathcal{D}}[I]_{\text{can}\mathcal{D}}$$

Calculamos as matrizes

$$[I]_{\mathcal{D}\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\text{can}\mathcal{D}} = ([I]_{\mathcal{D}\text{can}})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Logo

$$A^{253} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^{253} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^{253}+2 \cdot 9^{253}}{3} & \frac{-2 \cdot 3^{253}+2 \cdot 9^{253}}{3} \\ \frac{-3^{253}+9^{253}}{3} & \frac{2 \cdot 3^{253}+9^{253}}{3} \end{pmatrix}.$$

E a resposta é $\frac{3^{253}+2 \cdot 9^{253}}{3} + \frac{2 \cdot 3^{253}+9^{253}}{3} = 3^{253} + 9^{253}$.

Q12. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 115 & 352 & 173 & 777 \\ 0 & 213 & 111 & 888 \\ 0 & 0 & 751 & 121 \\ 0 & 0 & 0 & 871 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) as matrizes A e C são diagonalizáveis, mas B não é;
- (b) as matrizes A e B são diagonalizáveis, mas C não é;
- (c) as matrizes B e C são diagonalizáveis, mas A não é;
- (d) a matriz A é diagonalizável, mas B e C não são;
- (e) as matrizes A , B e C são diagonalizáveis.

Resposta a).

O polinômio característico de A é $c_A(t) = (115-t)(213-t)(751-t)(871-t)$ que tem as quatro raízes simples reais e diferentes. Logo A é diagonalizável.

O polinômio característico de B é $c_B(t) = (1-t)(1-t)(2-t)$. A matriz B será diagonalizável se, e somente se, a multiplicidade geométrica do autovalor 1 é 2. Temos que

$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $\dim(\text{Ker}(B - I)) = 1$, pois o sistema homogêneo com matriz de coeficientes $B - I$ tem uma variável livre só. Portanto, B não é diagonalizável.

O polinômio característico de C é:

$$\begin{aligned} \det(C - tI) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ -1 & 1-t & -1 \\ 1 & 1 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ 0 & 2-t & 2-t \\ 1 & 1 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t)^2(1-t). \end{aligned}$$

Temos que C é diagonalizável se, e somente se, a multiplicidade geométrica do autovalor 2 é 2.

$$C - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $\dim(\text{Ker}(C - 2I)) = 2$, pois o sistema homogêneo com matriz de coeficientes $C - 2I$ tem duas variáveis livres. Logo C é diagonalizável.

Q13. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $P_2(\mathbb{R})$ tais que:

$$w_1 = v_1 + 2v_2,$$

$$w_2 = v_1 + v_2,$$

$$w_3 = -v_1 - v_2 + v_3.$$

Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) T é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 3;
- (b) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 3;
- (c) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 4;
- (d) T é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 4;
- (e) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 5.

Resposta a).

Para calcular os autovalores de T e saber se T é diagonalizável devemos encontrar a matriz de T em relação a uma única base. Temos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{CB}}[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assim o polinômio característico de T é

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & -1-t & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = -(1-t)(1+t)(3-t).$$

Logo tem três raízes reais simples e diferentes, e portanto T é diagonalizável. Além disso, os autovalores de T são as raízes reais do polinômio característico de T , ou seja, 1, -1 e 3. Logo a soma dos autovalores de T é 3.

Q14. Considere a base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde:

$$u_1 = (23, 77, 15), \quad u_2 = (0, 708, 85), \quad u_3 = (0, 0, 177).$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$T(u_1) = u_1 + u_2 - u_3, \quad T(u_2) = u_2 + u_3, \quad T(u_3) = u_1 + u_2 + u_3.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) T é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de T ;
- (b) T não é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de T ;
- (c) T é invertível e 0 e 2 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T ;
- (d) T é invertível e 2 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T ;
- (e) T não é invertível e 0 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T .

Resposta a).

Calculamos a matriz de T em relação à base $\mathcal{B}$:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T :

$$\begin{aligned} \det([T]_{\mathcal{B}} - tI) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 2-t & 2-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2-t)(t^2 - t + 1). \end{aligned}$$

Logo as raízes do polinômio característico são 2, $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$. Portanto a única raiz real do polinômio característico é 2. Além disso, como 0 não é raiz do polinômio característico, temos que $\text{Ker } T = 0$. Isso implica que T é invertível.

Q15. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + 2x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{1 + 2x, x + 2x^2, x^2\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\text{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$;
- (b) $\text{Ker}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$ e $\text{Im}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$;
- (c) $\text{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1, x - x^2]$;
- (d) $\text{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$;
- (e) $\text{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1 + 2x, -x + 2x^2]$.

Resposta a).

Dado um vetor $v \in P_2(\mathbb{R})$ escrevemos $v = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ para indicar que v é o (único) vetor de $P_2(\mathbb{R})$ que tem por coordenadas (a, b, c) em relação à base $\mathcal{B}$.

Assim temos que $v = (a, b, c)_{\mathcal{B}} \in \text{Ker}(T)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, o núcleo está formado pelos vetores de $P_2(\mathbb{R})$ cujas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ são solução do sistema homogêneo com matriz de coeficientes $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$. Escalonando obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim obtemos que $\text{Ker } T = [(1, 1, -3)_{\mathcal{B}}]$. Assim, como $(1, 1, -3)_{\mathcal{B}} = (1 + x) + (1 + 2x) - 3x^2 = 2 + 3x - 3x^2$, temos que $\text{Ker } T = [2 + 3x - 3x^2]$.

Sabemos que $\text{Im}(T)$ é o subespaço gerado pela imagem dos elementos de $\mathcal{B}$, ou seja, $\text{Im}(T) = [T(1 + x), T(1 + 2x), T(x^2)]$. A matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ nos diz que $T(1 + x) = (1, 1, -1)_{\mathcal{C}}$, $T(1 + 2x) = (2, -1, 1)_{\mathcal{C}}$ e $T(x^2) = (-1, 1, 0)_{\mathcal{C}}$. Vamos tentar encontrar uma base de $\text{Im}(T)$, para isso escalonamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo obtemos que $\text{Im}(T) = [(0, 1, -1)_{\mathcal{C}}, (1, 0, 0)_{\mathcal{C}}]$. Agora, como $(0, 1, -1)_{\mathcal{C}} = (x + 2x^2) - x^2 = x + x^2$, e $(1, 0, 0)_{\mathcal{C}} = 1 + 2x$, temos que $\text{Im}(T) = [x + x^2, 1 + 2x]$.

Q16. Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R})$$

é diagonalizável;

(II) se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então existe uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = B$;

(III) para qualquer $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$, qualquer base $\mathcal{B}$ de $P_4(\mathbb{R})$ e qualquer base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, existe uma transformação linear $T : P_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}} = A$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) nenhuma das afirmações é verdadeira.

Resposta a).

(I) Fixada a base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, temos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo o polinômio característico de T é

$$\det([T]_{\mathcal{B}} - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t^3$$

Mas claramente $\dim(\text{Ker}(T)) \neq 3$. Logo T não é diagonalizável.

(II) O polinômio característico da matriz B é:

$$\det(B - tI) = \det \begin{pmatrix} 4-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (4-t)(3-t)(2-t)(1-t).$$

Logo tem quatro raízes reais simples. Isso implica que B é diagonalizável. Assim existe uma matriz invertível Q tal que $Q^{-1}BQ$ é diagonal. Podemos escolher Q de forma que $Q^{-1}BQ = A$. Multiplicando por Q à esquerda e

por Q^{-1} à direita obtemos que $Q A Q^{-1} = B$. Fazendo $P = Q^{-1}$ obtemos que (II) é verdadeiro.

(III) É um teorema provado em sala de aula.