Q1. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,-1,0)\}$$

dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $F : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[F]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$G(x, y, z) = (z, x - y, y - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Se can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então a soma das entradas da diagonal principal da matriz $[G \circ F]_{\mathcal{B},\mathrm{can}}$ é igual a:

(a) 4;
(b) 6;
(c) 0;
(d) -4;
(e) 8.

Q2. Considere o espaço vetorial $C(\mathbb{R})$ das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e seja V o subespaço de $C(\mathbb{R})$ dado por:

$$V = [e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x, 2].$$

Seja $T : V \to V$ o operador linear definido por $T(f) = f'$, para toda $f \in V$, e seja $\mathcal{B}$ o subconjunto de V dado por:

$$\mathcal{B} = \{e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x, 1\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathcal{B}$ não é uma base de V porque $\mathcal{B}$ não gera V;

(c) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $\mathcal{B}$ não é uma base de V porque $\mathcal{B}$ não é linearmente independente;

(e) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Q3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) se $b = -9$, $a \neq 5$ e $a \neq 3$, então A é diagonalizável;

(II) se $b = 4$, $a \neq -3$ e $a \neq 1$, então A é diagonalizável;

(III) se $b = 1$ e $a = -2$, então A é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q4. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + 2x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{1 + 2x, x + 2x^2, x^2\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathrm{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$;
(b) $\mathrm{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1, x - x^2]$;
(c) $\mathrm{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$;
(d) $\mathrm{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + 2x, -x + 2x^2]$;
(e) $\mathrm{Ker}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$.

Q5. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = t(t-a)(t+3)^2$. Denote por I o operador identidade de $P_3(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\dim\big(\mathrm{Ker}(T+3\mathrm{I})\big) = 1$, então T não é diagonalizável;

(II) se $a = 4$, então T é diagonalizável;

(III) se $a = 0$, $\dim\big(\mathrm{Ker}(T+3\mathrm{I})\big) = 2$ e $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$, então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q6. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A soma das entradas da diagonal principal de A^{253} é igual a:

(a) $3 + 9^{253}$;
(b) $3^{253} + 9^{253}$;
(c) $-3^{253} - 9^{253}$;
(d) $-3^{253} + 9^{253}$;
(e) $3^{253} - 9$.

Q7. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) A e B são semelhantes, mas C não é semelhante a A;
(b) B e C são semelhantes, mas A não é semelhante a B;
(c) nenhuma dessas três matrizes é semelhante a qualquer uma das outras duas;
(d) A e C são semelhantes, mas B não é semelhante a A;
(e) as três matrizes são semelhantes.

Q8. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $P_2(\mathbb{R})$ tais que:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + 2v_2, \\ w_2 &= v_1 + v_2, \\ w_3 &= -v_1 - v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 5;
(b) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 3;
(c) T é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 4;
(d) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 4;
(e) T é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 3.

Q9. Seja V um espaço vetorial de dimensão 7 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

(I) para todos $v, w \in V$, vale que $\langle v, T(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle$;
(II) se I denota o operador identidade de V e $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{I})$ tem dimensão 2, então o polinômio $(t+1)^2$ é um divisor do polinômio característico de T;
(III) não existe um subespaço W de V tal que $\dim(W) = 6$ e tal que $T(v) = \mathrm{proj}_W\, v$, para todo $v \in V$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que:

$$\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(1,1,0)], \quad \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [(0,0,1)]$$

e $(1,-1,0) \in \mathrm{Ker}(T)$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Se A é a matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{R}^3$, então:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^4$, $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos auto-espaços de T é igual a 4;

(II) se A é simétrica, então T é simétrico;

(III) se uma das colunas de A for uma combinação linear das outras colunas de A, então $\mathrm{Ker}(T)$ tem dimensão maior ou igual a 1.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q12. Considere a base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde:

$$u_1 = (23, 77, 15), \quad u_2 = (0, 708, 85), \quad u_3 = (0, 0, 177).$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$T(u_1) = u_1 + u_2 - u_3, \quad T(u_2) = u_2 + u_3, \quad T(u_3) = u_1 + u_2 + u_3.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de T;

(b) T é invertível e 2 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T;

(c) T não é invertível e 0 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T;

(d) T não é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de T;

(e) T é invertível e 0 e 2 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T.

Q13. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 37 e $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se T é sobrejetor, então 0 não é um autovalor de T;

(II) se $v \in V$ é um autovetor de T correspondente a um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in V$ é um autovetor de T correspondente a um autovalor $\mu \in \mathbb{R}$, então $v + w = 0$ ou $v + w$ é um autovetor de T correspondente ao autovalor $\lambda + \mu$;

(III) T tem pelo menos um autovalor e no máximo 37 autovalores.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q14. Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definido por:
$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R})$$
é diagonalizável;

(II) se:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
então existe uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = B$;

(III) para qualquer $A \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$, qualquer base $\mathcal{B}$ de $P_4(\mathbb{R})$ e qualquer base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, existe uma transformação linear $T : P_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = A$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) nenhuma das afirmações é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q15. Considere as matrizes:
$$A = \begin{pmatrix} 115 & 352 & 173 & 777 \\ 0 & 213 & 111 & 888 \\ 0 & 0 & 751 & 121 \\ 0 & 0 & 0 & 871 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Assinale a alternativa correta:

(a) as matrizes B e C são diagonalizáveis, mas A não é;
(b) a matriz A é diagonalizável, mas B e C não são;
(c) as matrizes A e C são diagonalizáveis, mas B não é;
(d) as matrizes A, B e C são diagonalizáveis;
(e) as matrizes A e B são diagonalizáveis, mas C não é.

Q16. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x + x^2, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(x^2 - x + 1)$ é igual a:

(a) $(2, -8)$;
(b) $(5, 3)$;
(c) $(-2, -8)$;
(d) $(-5, -3)$;
(e) $(5, -3)$.