

Q1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^4$, $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz e $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos auto-espacos de T é igual a 4;
- (II) se A é simétrica, então T é simétrico;
- (III) se uma das colunas de A for uma combinação linear das outras colunas de A , então $\text{Ker}(T)$ tem dimensão maior ou igual a 1.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que:

$$\text{Ker}(T - I) = [(1, 1, 0)], \quad \text{Ker}(T - 2I) = [(0, 0, 1)]$$

e $(1, -1, 0) \in \text{Ker}(T)$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Se A é a matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{R}^3$, então:

- (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1};$
- (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1};$
- (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Q3. Considere a base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde:

$$u_1 = (23, 77, 15), \quad u_2 = (0, 708, 85), \quad u_3 = (0, 0, 177).$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$T(u_1) = u_1 + u_2 - u_3, \quad T(u_2) = u_2 + u_3, \quad T(u_3) = u_1 + u_2 + u_3.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) T é invertível e 0 e 2 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T ;
- (b) T é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de T ;
- (c) T é invertível e 2 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T ;
- (d) T não é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de T ;
- (e) T não é invertível e 0 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de T .

Q4. Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R})$$

é diagonalizável;

(II) se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então existe uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = B$;

(III) para qualquer $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$, qualquer base $\mathcal{B}$ de $P_4(\mathbb{R})$ e qualquer base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, existe uma transformação linear $T : P_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}} = A$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) nenhuma das afirmações é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q5. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 37 e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se T é sobrejetor, então 0 não é um autovalor de T ;
- (II) se $v \in V$ é um autovetor de T correspondente a um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in V$ é um autovetor de T correspondente a um autovalor $\mu \in \mathbb{R}$, então $v + w = 0$ ou $v + w$ é um autovetor de T correspondente ao autovalor $\lambda + \mu$;
- (III) T tem pelo menos um autovalor e no máximo 37 autovalores.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q6. Seja V um espaço vetorial de dimensão 7 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para todos $v, w \in V$, vale que $\langle v, T(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle$;
- (II) se I denota o operador identidade de V e $\text{Ker}(T + I)$ tem dimensão 2, então o polinômio $(t + 1)^2$ é um divisor do polinômio característico de T ;
- (III) não existe um subespaço W de V tal que $\dim(W) = 6$ e tal que $T(v) = \text{proj}_W v$, para todo $v \in V$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q7. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + 2x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{1 + 2x, x + 2x^2, x^2\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\text{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1, x - x^2]$;
- (b) $\text{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$;
- (c) $\text{Ker}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$ e $\text{Im}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$;
- (d) $\text{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$;
- (e) $\text{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$ e $\text{Im}(T) = [1 + 2x, -x + 2x^2]$.

Q8. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A soma das entradas da diagonal principal de A^{253} é igual a:

- (a) $-3^{253} - 9^{253}$;
- (b) $-3^{253} + 9^{253}$;
- (c) $3^{253} - 9$;
- (d) $3^{253} + 9^{253}$;
- (e) $3 + 9^{253}$.

Q9. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = t(t - a)(t + 3)^2$. Denote por I o operador identidade de $P_3(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 1$, então T não é diagonalizável;
- (II) se $a = 4$, então T é diagonalizável;
- (III) se $a = 0$, $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 2$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 3$, então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q10. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0)\}$$

dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[F]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e seja $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$G(x, y, z) = (z, x - y, y - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Se can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então a soma das entradas da diagonal principal da matriz $[G \circ F]_{\mathcal{B}, \text{can}}$ é igual a:

- (a) 6;
- (b) -4;
- (c) 8;
- (d) 4;
- (e) 0.

Q11. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) nenhuma dessas três matrizes é semelhante a qualquer uma das outras duas;
- (b) A e B são semelhantes, mas C não é semelhante a A ;
- (c) A e C são semelhantes, mas B não é semelhante a A ;
- (d) B e C são semelhantes, mas A não é semelhante a B ;
- (e) as três matrizes são semelhantes.

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $b = -9$, $a \neq 5$ e $a \neq 3$, então A é diagonalizável;
- (II) se $b = 4$, $a \neq -3$ e $a \neq 1$, então A é diagonalizável;
- (III) se $b = 1$ e $a = -2$, então A é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q13. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $P_2(\mathbb{R})$ tais que:

$$w_1 = v_1 + 2v_2,$$

$$w_2 = v_1 + v_2,$$

$$w_3 = -v_1 - v_2 + v_3.$$

Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 4;
- (b) T é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 3;
- (c) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 5;
- (d) T não é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 3;
- (e) T é diagonalizável e a soma dos autovalores de T é igual a 4.

Q14. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 115 & 352 & 173 & 777 \\ 0 & 213 & 111 & 888 \\ 0 & 0 & 751 & 121 \\ 0 & 0 & 0 & 871 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) as matrizes A e B são diagonalizáveis, mas C não é;
- (b) as matrizes B e C são diagonalizáveis, mas A não é;
- (c) a matriz A é diagonalizável, mas B e C não são;
- (d) as matrizes A e C são diagonalizáveis, mas B não é;
- (e) as matrizes A , B e C são diagonalizáveis.

Q15. Considere o espaço vetorial $C(\mathbb{R})$ das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e seja V o subespaço de $C(\mathbb{R})$ dado por:

$$V = [e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 2].$$

Seja $T : V \rightarrow V$ o operador linear definido por $T(f) = f'$, para toda $f \in V$, e seja $\mathcal{B}$ o subconjunto de V dado por:

$$\mathcal{B} = \{e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 1\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;
- (b) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- (c) $\mathcal{B}$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;
- (d) $\mathcal{B}$ não é uma base de V porque $\mathcal{B}$ não gera V ;
- (e) $\mathcal{B}$ não é uma base de V porque $\mathcal{B}$ não é linearmente independente.

Q16. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x + x^2, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(x^2 - x + 1)$ é igual a:

- (a) $(5, 3)$;
- (b) $(2, -8)$;
- (c) $(-5, -3)$;
- (d) $(5, -3)$;
- (e) $(-2, -8)$.