

**Q1.** Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador linear  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  definido por:

$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R})$$

é diagonalizável;

(II) se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então existe uma matriz invertível  $P \in M_4(\mathbb{R})$  tal que  $P^{-1}AP = B$ ;

(III) para qualquer  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ , qualquer base  $\mathcal{B}$  de  $P_4(\mathbb{R})$  e qualquer base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$ , existe uma transformação linear  $T : P_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $[T]_{\mathcal{BC}} = A$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) nenhuma das afirmações é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Q2.** Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x + x^2, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

dos espaços vetoriais  $P_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente. Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $T(x^2 - x + 1)$  é igual a:

- (a)  $(5, 3)$ ;
- (b)  $(2, -8)$ ;
- (c)  $(-2, -8)$ ;
- (d)  $(-5, -3)$ ;
- (e)  $(5, -3)$ .

**Q3.** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  um operador linear cujo polinômio característico é  $p_T(t) = t(t-a)(t+3)^2$ . Denote por  $I$  o operador identidade de  $P_3(\mathbb{R})$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 1$ , então  $T$  não é diagonalizável;
- (II) se  $a = 4$ , então  $T$  é diagonalizável;
- (III) se  $a = 0$ ,  $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 2$  e  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ , então  $T$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

**Q4.** Considere a base  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , onde:

$$u_1 = (23, 77, 15), \quad u_2 = (0, 708, 85), \quad u_3 = (0, 0, 177).$$

Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que:

$$T(u_1) = u_1 + u_2 - u_3, \quad T(u_2) = u_2 + u_3, \quad T(u_3) = u_1 + u_2 + u_3.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  não é invertível e 0 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de  $T$ ;
- (b)  $T$  é invertível e 2 e 3 são as únicas raízes reais do polinômio característico de  $T$ ;
- (c)  $T$  é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de  $T$ ;
- (d)  $T$  não é invertível e 2 é a única raiz real do polinômio característico de  $T$ ;
- (e)  $T$  é invertível e 0 e 2 são as únicas raízes reais do polinômio característico de  $T$ .

**Q5.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A soma das entradas da diagonal principal de  $A^{253}$  é igual a:

- (a)  $3 + 9^{253}$ ;
- (b)  $3^{253} - 9$ ;
- (c)  $-3^{253} + 9^{253}$ ;
- (d)  $3^{253} + 9^{253}$ ;
- (e)  $-3^{253} - 9^{253}$ .

**Q6.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão 7 munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para todos  $v, w \in V$ , vale que  $\langle v, T(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle$ ;
- (II) se  $I$  denota o operador identidade de  $V$  e  $\text{Ker}(T + I)$  tem dimensão 2, então o polinômio  $(t + 1)^2$  é um divisor do polinômio característico de  $T$ ;
- (III) não existe um subespaço  $W$  de  $V$  tal que  $\dim(W) = 6$  e tal que  $T(v) = \text{proj}_W v$ , para todo  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

**Q7.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 37 e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $T$  é sobrejetor, então 0 não é um autovalor de  $T$ ;
- (II) se  $v \in V$  é um autovetor de  $T$  correspondente a um autovalor  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $w \in V$  é um autovetor de  $T$  correspondente a um autovalor  $\mu \in \mathbb{R}$ , então  $v + w = 0$  ou  $v + w$  é um autovetor de  $T$  correspondente ao autovalor  $\lambda + \mu$ ;
- (III)  $T$  tem pelo menos um autovalor e no máximo 37 autovalores.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

**Q8.** Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + 2x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{1 + 2x, x + 2x^2, x^2\}$$

de  $P_2(\mathbb{R})$  e seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\text{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$  e  $\text{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$ ;
- (b)  $\text{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$  e  $\text{Im}(T) = [1, x - x^2]$ ;
- (c)  $\text{Ker}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$  e  $\text{Im}(T) = [1 + 2x, -x + 2x^2]$ ;
- (d)  $\text{Ker}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$  e  $\text{Im}(T) = [2 + 3x - 3x^2]$ ;
- (e)  $\text{Ker}(T) = [1 + x - 3x^2]$  e  $\text{Im}(T) = [1 + 2x, x + x^2]$ .

**Q9.** Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0)\}$$

dos espaços vetoriais  $P_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Seja  $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear tal que:

$$[F]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e seja  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por:

$$G(x, y, z) = (z, x - y, y - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Se  $\text{can}$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ , então a soma das entradas da diagonal principal da matriz  $[G \circ F]_{\mathcal{B}, \text{can}}$  é igual a:

- (a) 8;
- (b) 4;
- (c) -4;
- (d) 0;
- (e) 6.

**Q10.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_3(\mathbb{R})$  a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $b = -9$ ,  $a \neq 5$  e  $a \neq 3$ , então  $A$  é diagonalizável;
- (II) se  $b = 4$ ,  $a \neq -3$  e  $a \neq 1$ , então  $A$  é diagonalizável;
- (III) se  $b = 1$  e  $a = -2$ , então  $A$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

**Q11.** Sejam  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  e  $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$  bases de  $P_2(\mathbb{R})$  tais que:

$$w_1 = v_1 + 2v_2,$$

$$w_2 = v_1 + v_2,$$

$$w_3 = -v_1 - v_2 + v_3.$$

Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  não é diagonalizável e a soma dos autovalores de  $T$  é igual a 5;
- (b)  $T$  é diagonalizável e a soma dos autovalores de  $T$  é igual a 3;
- (c)  $T$  é diagonalizável e a soma dos autovalores de  $T$  é igual a 4;
- (d)  $T$  não é diagonalizável e a soma dos autovalores de  $T$  é igual a 3;
- (e)  $T$  não é diagonalizável e a soma dos autovalores de  $T$  é igual a 4.

**Q12.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) as três matrizes são semelhantes;
- (b)  $A$  e  $B$  são semelhantes, mas  $C$  não é semelhante a  $A$ ;
- (c)  $B$  e  $C$  são semelhantes, mas  $A$  não é semelhante a  $B$ ;
- (d)  $A$  e  $C$  são semelhantes, mas  $B$  não é semelhante a  $A$ ;
- (e) nenhuma dessas três matrizes é semelhante a qualquer uma das outras duas.

**Q13.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual. Sejam  $\mathcal{B}$  uma base de  $\mathbb{R}^4$ ,  $A \in M_4(\mathbb{R})$  uma matriz e  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  a transformação linear tal que  $[T]_{\mathcal{B}} = A$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos auto-espacos de  $T$  é igual a 4;
- (II) se  $A$  é simétrica, então  $T$  é simétrico;
- (III) se uma das colunas de  $A$  for uma combinação linear das outras colunas de  $A$ , então  $\text{Ker}(T)$  tem dimensão maior ou igual a 1.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

**Q14.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear tal que:

$$\text{Ker}(T - I) = [(1, 1, 0)], \quad \text{Ker}(T - 2I) = [(0, 0, 1)]$$

e  $(1, -1, 0) \in \text{Ker}(T)$ , onde  $I$  denota o operador identidade de  $\mathbb{R}^3$ . Se  $A$  é a matriz que representa  $T$  na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ , então:

- (a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1};$
- (b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1};$
- (c)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (d)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (e)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**Q15.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 115 & 352 & 173 & 777 \\ 0 & 213 & 111 & 888 \\ 0 & 0 & 751 & 121 \\ 0 & 0 & 0 & 871 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) as matrizes  $A$  e  $C$  são diagonalizáveis, mas  $B$  não é;
- (b) as matrizes  $B$  e  $C$  são diagonalizáveis, mas  $A$  não é;
- (c) as matrizes  $A$  e  $B$  são diagonalizáveis, mas  $C$  não é;
- (d) a matriz  $A$  é diagonalizável, mas  $B$  e  $C$  não são;
- (e) as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são diagonalizáveis.

**Q16.** Considere o espaço vetorial  $C(\mathbb{R})$  das funções contínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  e seja  $V$  o subespaço de  $C(\mathbb{R})$  dado por:

$$V = [e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 2].$$

Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por  $T(f) = f'$ , para toda  $f \in V$ , e seja  $\mathcal{B}$  o subconjunto de  $V$  dado por:

$$\mathcal{B} = \{e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x, 1\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\mathcal{B}$  não é uma base de  $V$  porque  $\mathcal{B}$  não é linearmente independente;
- (b)  $\mathcal{B}$  não é uma base de  $V$  porque  $\mathcal{B}$  não gera  $V$ ;
- (c)  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .