Q1. Considere o espaço vetorial $C([-1,1])$ munido do produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in C([-1,1]).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $p(x) = a + bx$ é o polinômio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima $f(x) = e^x$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{e^2+5}{e}$;
(b) $\frac{3}{e}$;
(c) $\frac{e^2+5}{2e}$;
(d) $\frac{e^2-1}{2e}$;
(e) $\frac{2}{e}$.

Q2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1,1,1) = (1,0,0), \quad T(0,1,2) = (0,1,1), \quad T(1,1,0) = (1,1,0).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $T(1,0,0) = (1,-2,-1)$, $T(0,1,0) = (0,5,4)$;
(b) $T(1,0,0) = (-1,-2,0)$, $T(0,1,0) = (0,2,3)$;
(c) $T(1,0,0) = (2,-1,-2)$, $T(0,1,0) = (0,3,1)$;
(d) $T(1,0,0) = (1,-2,-1)$, $T(0,1,0) = (0,3,1)$;
(e) $T(1,0,0) = (2,-1,-2)$, $T(0,1,0) = (0,2,3)$.

① Considere $u_1(x) = 1$; $u_2(x) = x$. Então, $\begin{cases} \langle u_1, u_1\rangle a + \langle u_1, u_2\rangle b = \langle u_1, f\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle a + \langle u_2, u_2\rangle b = \langle u_2, f\rangle. \end{cases}$

$\langle u_1, u_1\rangle = 2$; $\langle u_1, u_2\rangle = 0$; $\langle u_2, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$;

$\langle u_1, f\rangle = \int_{-1}^{1} e^x\,dx = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2-1}{e}$; $\langle u_2, f\rangle = \int_{-1}^{1} x e^x\,dx = (x-1)e^x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$.

Logo, $a = \frac{e^2-1}{2e}$; $b = \frac{3}{e}$ $\therefore$ $p(x) = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}x$ e $a+b = \frac{e^2+5}{2e}$.

② $T(0,0,1) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0)$

$T(0,1,0) = T(0,1,2) - T(0,0,2) = (0,1,1) - (0,-2,0) = \boxed{(0,3,1)}$

$\therefore T(1,0,0) = T(1,1,1) - T(0,1,0) - T(0,0,1) = (1,0,0) - (0,2,1) = \boxed{(1,-2,-1)}$

Q3. Seja $\mathfrak{C}$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tais que:

$T(1+x+x^2) = (1,0,0), \quad T(1-x+x^2) = (0,1,0), \quad T(2+2x^2) = (1,1,0).$

Assinale a alternativa correta:

(a) existe exatamente uma transformação linear T no conjunto $\mathfrak{C}$ cuja imagem é $[(1,0,0),(0,1,0)]$ e tal que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$;

(b) existe exatamente uma transformação linear injetora no conjunto $\mathfrak{C}$;

(c) o conjunto $\mathfrak{C}$ é vazio;

(d) existem infinitas transformações lineares sobrejetoras no conjunto $\mathfrak{C}$;

(e) existem infinitas transformações lineares injetoras no conjunto $\mathfrak{C}$.

Q4. Seja V um espaço vetorial de dimensão 33. Considere as seguintes afirmações:

V (I) existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que:

$$10\dim(\mathrm{Ker}(T)) - 5\dim(\mathrm{Im}(T)) = -15;$$

F (II) existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$;

F (III) não existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que:

$$V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(b) todas as afirmações são falsas;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

(3) Note-se que $T(2+2x^2) = T((1+x+x^2)+(1-x+x^2)) =$
$= T(1+x+x^2) + T(1-x+x^2)$

Logo, se completarmos $\{1+x+x^2, 1-x+x^2\}$ a uma base $\{1+x+x^2, 1-x+x^2, u_3(x), u_4(x)\}$, ($\exists!$ $T \in \mathfrak{C}$) para cada valor que escolhermos (arbitrariamente!) p/ $T(u_3)$ e $T(u_4)$.

Cada uma destas pertence a $\mathfrak{C}$.

$\therefore \exists$ infinitas sobrejetoras $T \in \mathfrak{C}$, já que podemos tomar $T(u_3) = (0,0,1)$ e escolher arbitrariamente o valor de $T(u_4)$.

---

(4) (I) Sejam $k = \dim \mathrm{Ker}(T)$; $i = \dim \mathrm{Im}(T)$. Então, $\begin{cases} k+i = 33 \\ 10k - 5i = -15 \end{cases}$ $\therefore$ $k = 10$, $i = 23$.

Assim, sendo $\{u_1, \dots, u_{33}\}$ uma base de V, $\exists!$ T (linear) $: V \to V$ t.q. $T(u_i) = 0$, $i = 1, \dots, 10$. e $T(u_j) = u_j$; $j = 11, \dots, 33$.

Assim, $\mathrm{Ker}(T)$ tem dim 10 ($\{u_1, \dots, u_{10}\}$ é base de $\mathrm{Ker}(T)$) e $\dim \mathrm{Im}(T) = 23$ ($\{u_{11}, \dots, u_{33}\}$ é base de $\mathrm{Im}(T)$).

$\therefore \exists$ uma tal T, assim como descrita em (I).

$\therefore$ (I) é verdadeira.;

(II) se $\exists T$, então $33 = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 2 \dim \mathrm{Ker}(T)$.

$\therefore \dim \mathrm{Ker}(T) = \frac{33}{2} \notin \mathbb{N}$. Absurdo $\therefore \nexists T$.

$\therefore$ (II) é falsa.

(III) é falsa, pois a transf. T definida em (I) é uma $T: V \to V$ t.q. $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$, já que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$ e $\exists B_1$ base de $\mathrm{Ker}(T)$ ($B_1 = \{u_1, \dots, u_{10}\}$) e $\exists B_2$ base de $\mathrm{Im}(T)$ ($B_2 = \{u_{11}, \dots, u_{33}\}$) t.q. $B_1 \cup B_2$ é base de V.

Q5. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 4 e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de V. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : V \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(e_1) = 1, \quad T(e_2) = ax + x^2, \quad T(e_3) = 1 + x + x^2, \quad T(e_4) = bx^2.$$

Pode-se afirmar que:

(a) T é sobrejetora;
(b) T é injetora se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 0$;
(c) T é injetora se, e somente se, $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
(d) T é sobrejetora se, e somente se, $a \neq 1$ ou $b \neq 0$;
(e) T é sobrejetora se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 0$.

Q6. Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = -a_1 a_2 + b_1 b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 3a_1 a_2 - 2a_1 b_2 - 2a_2 b_1 - 2b_1 b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = a_1 a_2 + 2a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_1 b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

5 Vamos analisar a dim Im(T). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1-a & -ab \end{pmatrix}$

Ora dim Im(T) = 3 (i.e. T é sobrejetora) $\Leftrightarrow$ a matriz tiver 3 pivôs $\Leftrightarrow$ $1-a \neq 0$ ou $-ab \neq 0$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq 1, \ \forall b \\ \text{ou} \\ a = 1 \text{ e } b \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq 1 \\ \text{ou} \\ b \neq 0 \end{array} \right.$

6 (I) é falsa, pois $\langle (1,0), (1,0) \rangle = -1 < 0$. ;
(II) é falsa, pois $\langle (0,1), (0,1) \rangle = -2 < 0$;
(III) é falsa, pois $\langle (1,0), (0,1) \rangle = 2 \neq -1 = \langle (0,1), (1,0) \rangle$.

Q7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de V com $W \neq V$. Considere a aplicação $T : V \to V$ definida por:

$$T(v) = \operatorname{proj}_W v, \quad v \in V.$$

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) $V = \operatorname{Im}(T) \oplus \big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\perp}$;
(b) $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \big(\operatorname{Ker}(T)\big)^{\perp}$;
(c) $\operatorname{Im}(T) = W$;
(d) $\operatorname{Ker}(T) = W^{\perp}$;
(e) $\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, para todos $v_1, v_2 \in V$.

Q8. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b + 5c, -a - 2b + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\operatorname{Im}(T) = [(1,-1,5),(0,2,-1)]$ e $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 1$;
(b) $\operatorname{Im}(T) = [(1,1,-1),(1,5,1)]$ e $\operatorname{Ker}(T) = [-3 + 2x + x^2]$;
(c) $\operatorname{Im}(T) = [(-3,2,1)]$ e $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 1$;
(d) $\operatorname{Im}(T) = [(1,1,-1),(1,3,4)]$ e $\operatorname{Ker}(T) = [-3 + 2x + x^2]$;
(e) $\operatorname{Im}(T) = [(-3,2,1)]$ e $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 2$.

7 Dado que $W \neq V$, $(\exists v \in V)$ $v \in W^{\perp}$ e $v \neq 0$. (já que $W^{\perp} \neq \{0\}$). Logo $T(v) = 0$ (pois $v \in W^{\perp}$).
Daí, $\langle T(v), T(v) \rangle = 0 \neq \langle v, v \rangle$ (pois $v \neq 0$).
e. $\therefore$ e é falsa.

8 $T(1) = (1, 1, -1)$. ; $T(x) = (1, -1, -2)$; $T(x^2) = (1, 5, 1)$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+5c=0 \\ -a-2b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-3c \\ b=2c \end{cases} ; c \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ $p \in \operatorname{Ker}(T) \iff (\exists c \in \mathbb{R})$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $p(x) = c(-3+2x+x^2)$.
$\therefore$ $\operatorname{Ker}(T) = [-3+2x+x^2]$.

Por outro lado, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Logo, $\operatorname{Im}(T) = [\underbrace{(1,1,-1); (1,-1,-2)}_{L.I.}]$ e $(1,5,1) \in \operatorname{Im}(T)$ $(\therefore \dim \operatorname{Im}(T) = 2)$

Dado que claramente $\{(1,1,-1), (1,5,1)\}$ é L.I. e está contido em $\operatorname{Im}(T)$, segue
$\operatorname{Im}(T) = [(1,1,-1); (1,5,1)]$.

Q9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e sejam v_1, v_2 e v_3 os vetores dados por:

$$v_1 = (1,0,1,0), \quad v_2 = (-1,2,3,-1), \quad v_3 = (0,1,-1,1).$$

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt a $\{v_1, v_2, v_3\}$, obtém-se um conjunto ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ com $w_1 = v_1$. Se s denota a soma das coordenadas do vetor w_2 e t denota a soma das coordenadas do vetor w_3, então:

(a) $s = -1$ e $t = \frac{27}{13}$;
(b) $s = -1$ e $t = 18$;
(c) $s = 1$ e $t = 18$;
(d) $s = 1$ e $t = \frac{14}{13}$;
(e) $s = 1$ e $t = \frac{27}{13}$.

Q10. Considere as seguintes afirmações:

F (I) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então para todos $v, w \in V$ vale que $|\langle v, w \rangle| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se, existe λ real não negativo tal que $v = \lambda w$ ou $w = \lambda v$;

(II) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então para todos $v, w \in V$ vale que $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ se, e somente se, v e w são linearmente dependentes;

(III) para quaisquer números reais positivos a_1, a_2, a_3, a_4, vale que:

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq 16.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são falsas;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

9) $w_2 = v_2 - pr_{w_1} v_2 = v_2 - \frac{2}{2} w_1 = (-1,2,3,-1) - (1,0,1,0) = (-2,2,2,-1)$

$\therefore \boxed{s=1}$.

$pr_{w_1} v_3 = \frac{-1}{2}(1,0,1,0) = \left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0\right)$; $pr_{w_2} v_3 = \frac{-1}{13} w_1 = \left(\frac{2}{13}, \frac{-2}{13}, \frac{-2}{13}, \frac{1}{13}\right)$.

$w_3 = v_3 - (pr_{w_1} v_3 + pr_{w_2} v_3) = (0,1,-1,1) - \left(\frac{-9}{26}, \frac{-2}{13}, \frac{17}{26}, \frac{1}{13}\right) = \left(\frac{9}{26}, \frac{15}{13}, \frac{-9}{26}, \frac{12}{13}\right)$

$\therefore \boxed{t = \frac{27}{13}}$

10) (I) e' falsa, pois tomando $w = -v$, temos $|\langle v, w \rangle| = |\langle v, -v \rangle| =$
$= \|v\|^2 = \|v\| \cdot \|(-v)\| = \|v\| \cdot \|w\|$

(II) e' falsa, pois, se $v \neq 0$, $\{v, -v\}$ e' L.D., mas
$\|v+w\| = \|v + (-v)\| = \|0\| = 0 \neq 2\|v\| = \|v\| + \|-v\| = \|v\| + \|w\|$.

(III) e' verdadeira, pois considerando em $\mathbb{R}^4$ com o $\langle , \rangle$ usual e $u = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}, \frac{1}{\sqrt{a_4}}\right)$ e $v = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4})$ temos:

$16 = \langle u, v \rangle^2 \underset{C.S.}{\leq} \|u\|^2 \|v\|^2 = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right) \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

#

Q11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^8$ munido do seu produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e para cada $u \in \mathbb{R}^8$ seja $P_u : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $P_u(x) = \langle u, x \rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^8$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

e seja $A : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $A(p) = p''$, para todo $p \in P(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) para qualquer $u \in \mathbb{R}^8$ não nulo, vale que $\dim\big(\mathrm{Ker}(P_u)\big) = 7$;

(b) $T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

(c) para qualquer $u \in \mathbb{R}^8$ não nulo e qualquer subespaço W de $\mathbb{R}^8$ tal que $\mathbb{R}^8 = [u] \oplus W$, vale que $W \subset \mathrm{Ker}(P_u)$;

(d) A é sobrejetora;

(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = 2$.

Q12. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 2a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + b_1b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Se $S = [(1, -1)]$, então $S^\perp$ é igual a:

(a) $[(2,1)]$;

(b) $[(3,2)]$;

(c) $[(1,1)]$;

(d) $[(2,3)]$;

(e) $[(1,2)]$.

(11) $\mathbb{R}^8 = [u] \oplus [u]^\perp \therefore \dim [u]^\perp = 7$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_7\}$ base de $[u]^\perp$ e $W = [u+v_1, v_2, \dots, v_7]$

É fácil ver que $[u] \cap W = \{0\}$. Logo, $\mathcal{B} = \{u, u+v_1, v_2, \dots v_7\}$ é L.I. Logo, $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^8$ (pois $\# \mathcal{B} = 8 = \dim \mathbb{R}^8$).

$\therefore [u] \oplus W = \mathbb{R}^8$.

Mas $u + v_1 \in W$ e $P_u(u+v_1) = \langle u, u+v_1 \rangle = \|u\|^2 \neq 0$ (pois $u \neq 0$).

$\therefore u + v_1 \notin \mathrm{Ker}(P_u) \therefore W \not\subset \mathrm{Ker}\, P_u$.

(12) $v = (a,b) \in S^\perp \iff v \perp (1,-1) \iff 0 = \langle (a,b), (1,-1) \rangle =$

$= 2a + a - b - b = 3a - 2b \iff a = \frac{2}{3} b$

$\therefore v \in S^\perp \iff (\exists\, b \in \mathbb{R})\ v = (\frac{2}{3} b, b) = \frac{b}{3}(2,3)$.

$S^\perp = [(2,3)]$.

Q13. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja:

$$S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - c = 0 \text{ e } -3a + b + 2d = 0\}.$$

Temos que $S^\perp$ é igual a:

(a) $[(0, 1, -3, 2)]$;
(b) $[(1, 0, -1, 0), (0, 1, -3, 2)]$;
(c) $[(1, 0, -1, 0)]$;
(d) $[(1, 0, -1, 0), (0, 2, -3, 2)]$;
(e) $[(1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, 2)]$.

Q14. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um subespaço de V, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de W e $v \in V$. Suponha que:

$$\|e_1\| = 1, \quad \|e_2\| = \|e_3\| = \sqrt{2},$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = -1, \quad \langle e_2, e_3 \rangle = 1;$$

suponha também que:

$$\text{proj}_{e_1} v = 2e_1, \quad \text{proj}_{e_2} v = 0, \quad \text{proj}_{e_3} v = 2e_3.$$

Se $w = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ é o elemento de W mais próximo de v, então $a + b + c$ é igual a:

(a) 16;
(b) 14;
(c) 20;
(d) 18;
(e) 12.

13) $u = (a,b,c,d) \in S \iff (\exists a, d \in \mathbb{R})\ u = (a, 3a-2d, a, d) =$
$= a(1,3,1,0) + d(0,-2,0,1)$. $\therefore S = [(1,3,1,0); (0,-2,0,1)]$.

Logo $v = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in S^\perp \iff v \perp (1,3,1,0)$ e $v \perp (0,-2,0,1) \iff$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ -2\beta + \delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = -\alpha - 3\beta \\ \delta = 2\beta \end{cases} ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$\therefore v \in S^\perp \iff (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ v = (\alpha, \beta, -\alpha - 3\beta, 2\beta) \iff$
$\iff (\exists!\, \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ v = \alpha(1,0,-1,0) + \beta(0,1,-3,2)$.

14)
$$\begin{cases} \langle e_1, e_1 \rangle a + \langle e_1, e_2 \rangle b + \langle e_1, e_3 \rangle c = \langle e_1, v \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle a + \langle e_2, e_2 \rangle b + \langle e_2, e_3 \rangle c = \langle e_2, v \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle a + \langle e_3, e_2 \rangle b + \langle e_3, e_3 \rangle c = \langle e_3, v \rangle. \end{cases}$$

Mas, $2e_1 = pr_{e_1} v = \dfrac{\langle v, e_1 \rangle}{1} e_1$; $\therefore \langle v, e_1 \rangle = 2$.

$\langle v_2, e_2 \rangle = 0$ (pois $pr_{e_2} v = 0$) e

$2e_3 = pr_{e_3} v = \left(\dfrac{\langle v, e_3 \rangle}{2}\right) e_3$ $\therefore \langle v, e_3 \rangle = 4$.

$$\therefore \begin{cases} a - b - c = 2 \\ -a + 2b + c = 0 \\ -a + b + 2c = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 10 \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases} \quad \therefore a + b + c = 18.$$

Q15. Considere as seguintes afirmações:

F (I) existem um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, um subespaço W de V, vetores $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, com $w_1 \neq w_2$, tais que $v - w_1 \in W^\perp$ e $v - w_2 \in W^\perp$;

V (II) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de V e $v \in V$ satisfaz $\langle v, e_i\rangle = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então $v = 0$;

F (III) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, W é um subespaço de V e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de V, então para todo $v \in V$ vale que:

$$\mathrm{proj}_W\, v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|^2}\, e_i.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

15 (I) é falsa, pois $\langle w_1 - w_2, w_1 - w_2\rangle =$

$= \langle (w_1 - v) + (v - w_2), w_1 - w_2\rangle = \langle \underbrace{w_1 - v}_{\in W^\perp}, \underbrace{w_1 - w_2}_{\in W}\rangle + \langle \underbrace{v - w_2}_{\in W^\perp}, \underbrace{w_1 - w_2}_{\in W}\rangle =$

$= 0 + 0 = 0 \quad \therefore w_1 = w_2$ #

(II) é verdad., pois se $v \in V$, $(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R})$ $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

$\therefore \langle v, v\rangle = \langle v, \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle v, e_1\rangle}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v, e_2\rangle}_{=0} + \ldots + \alpha_n \underbrace{\langle v, e_n\rangle}_{=0} = 0.$

$\therefore v = 0.$ #

(III) é falsa. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$ com o $\langle , \rangle$ usual.,

sejam $W = \{(\alpha, \beta, 0) \in \mathbb{R}^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $v = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

Então, 1) $B = \{\underbrace{(1,1,0)}_{e_1}; \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}\}$ é base de W.;

2) $\mathrm{pr}_W(1,1,1) = (1,1,0)$ (pois $(1,1,1) - (1,1,0) = (0,0,1) \perp W$).

Mas $\left(\frac{\langle v, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}\right) e_1 + \left(\frac{\langle v, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}\right) e_2 = \frac{2}{2}(1,1,0) + \frac{1}{1}(0,1,0) =$

$= (1,1,0) + (0,1,0) = (1,2,0) \neq (1,1,0) = \mathrm{pr}_W(1,1,1)$

Q16. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

e seja $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$, onde A^t denota a transposta da matriz A. Temos que $\dim(S^\perp)$ é igual a:

(a) 3;
(b) 4;
(c) 1;
(d) 0;
(e) 2.

16 $x \in S \Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})\ x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é (claramente, pois é L.I.)

uma base de S $\therefore \dim S = 3$.

logo $\dim S^\perp = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim S = 4 - 3 = \boxed{1}$