

Q1. Considere o espaço vetorial $C([-1, 1])$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx, \quad f, g \in C([-1, 1]).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $p(x) = a + bx$ é o polinômio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima $f(x) = e^x$, então $a + b$ é igual a:

- (a) $\frac{e^2+5}{e}$;
- (b) $\frac{2}{e}$;
- (c) $\frac{e^2-1}{2e}$;
- (d) $\frac{e^2+5}{2e}$;
- (e) $\frac{3}{e}$.

Q2. Considere as seguintes afirmações:

- (I) existem um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, um subespaço W de V , vetores $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, com $w_1 \neq w_2$, tais que $v - w_1 \in W^\perp$ e $v - w_2 \in W^\perp$;
- (II) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base de V e $v \in V$ satisfaz $\langle v, e_i \rangle = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, então $v = 0$;
- (III) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W é um subespaço de V e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base de V , então para todo $v \in V$ vale que:

$$\text{proj}_W v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1, 1, 1) = (1, 0, 0), \quad T(0, 1, 2) = (0, 1, 1), \quad T(1, 1, 0) = (1, 1, 0).$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $T(1, 0, 0) = (2, -1, -2)$, $T(0, 1, 0) = (0, 3, 1)$;
- (b) $T(1, 0, 0) = (1, -2, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 3, 1)$;
- (c) $T(1, 0, 0) = (2, -1, -2)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2, 3)$;
- (d) $T(1, 0, 0) = (-1, -2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2, 3)$;
- (e) $T(1, 0, 0) = (1, -2, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 5, 4)$.

Q4. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 2a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + b_1b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Se $S = [(1, -1)]$, então $S^\perp$ é igual a:

- (a) $[(2, 1)]$;
- (b) $[(1, 1)]$;
- (c) $[(2, 3)]$;
- (d) $[(1, 2)]$;
- (e) $[(3, 2)]$.

Q5. Seja V um espaço vetorial de dimensão 33. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ tal que:

$$10 \dim(\text{Ker}(T)) - 5 \dim(\text{Im}(T)) = -15;$$

(II) existe uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$;

(III) não existe uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ tal que:

$$V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T).$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q6. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^8$ munido do seu produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e para cada $u \in \mathbb{R}^8$ seja $P_u : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $P_u(x) = \langle u, x \rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^8$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

e seja $A : P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $A(p) = p''$, para todo $p \in P(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) A é sobrejetora;
- (b) $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$;
- (c) para qualquer $u \in \mathbb{R}^8$ não nulo, vale que $\dim(\text{Ker}(P_u)) = 7$;
- (d) para qualquer $u \in \mathbb{R}^8$ não nulo e qualquer subespaço W de $\mathbb{R}^8$ tal que $\mathbb{R}^8 = [u] \oplus W$, vale que $W \subset \text{Ker}(P_u)$;
- (e) $T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Q7. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b + 5c, -a - 2b + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1), (1, 3, 4)]$ e $\text{Ker}(T) = [-3 + 2x + x^2]$;
- (b) $\text{Im}(T) = [(1, -1, 5), (0, 2, -1)]$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
- (c) $\text{Im}(T) = [(1, 1, -1), (1, 5, 1)]$ e $\text{Ker}(T) = [-3 + 2x + x^2]$;
- (d) $\text{Im}(T) = [(-3, 2, 1)]$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$;
- (e) $\text{Im}(T) = [(-3, 2, 1)]$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.

Q8. Seja $\mathfrak{C}$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que:

$$T(1 + x + x^2) = (1, 0, 0), \quad T(1 - x + x^2) = (0, 1, 0), \quad T(2 + 2x^2) = (1, 1, 0).$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) existem infinitas transformações lineares sobrejetoras no conjunto $\mathfrak{C}$;
- (b) existe exatamente uma transformação linear T no conjunto $\mathfrak{C}$ cuja imagem é $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e tal que $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
- (c) existe exatamente uma transformação linear injetora no conjunto $\mathfrak{C}$;
- (d) existem infinitas transformações lineares injetoras no conjunto $\mathfrak{C}$;
- (e) o conjunto $\mathfrak{C}$ é vazio.

Q9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e sejam v_1 , v_2 e v_3 os vetores dados por:

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (-1, 2, 3, -1), \quad v_3 = (0, 1, -1, 1).$$

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt a $\{v_1, v_2, v_3\}$, obtém-se um conjunto ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ com $w_1 = v_1$. Se s denota a soma das coordenadas do vetor w_2 e t denota a soma das coordenadas do vetor w_3 , então:

- (a) $s = 1$ e $t = \frac{14}{13}$;
- (b) $s = -1$ e $t = \frac{27}{13}$;
- (c) $s = 1$ e $t = \frac{27}{13}$;
- (d) $s = 1$ e $t = 18$;
- (e) $s = -1$ e $t = 18$.

Q10. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja:

$$S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - c = 0 \text{ e } -3a + b + 2d = 0\}.$$

Temos que $S^\perp$ é igual a:

- (a) $[(1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, 2)]$;
- (b) $[(1, 0, -1, 0)]$;
- (c) $[(1, 0, -1, 0), (0, 2, -3, 2)]$;
- (d) $[(1, 0, -1, 0), (0, 1, -3, 2)]$;
- (e) $[(0, 1, -3, 2)]$.

Q11. Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = -a_1a_2 + b_1b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 3a_1a_2 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 - 2b_1b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = a_1a_2 + 2a_1b_2 - a_2b_1 + b_1b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são falsas;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q12. Considere as seguintes afirmações:

(I) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então para todos $v, w \in V$ vale que $|\langle v, w \rangle| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se, existe λ real não negativo tal que $v = \lambda w$ ou $w = \lambda v$;

(II) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então para todos $v, w \in V$ vale que $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ se, e somente se, v e w são linearmente dependentes;

(III) para quaisquer números reais positivos a_1, a_2, a_3, a_4 , vale que:

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \right) (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq 16.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

Q13. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 4 e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de V . Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : V \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(e_1) = 1, \quad T(e_2) = ax + x^2, \quad T(e_3) = 1 + x + x^2, \quad T(e_4) = bx^2.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) T é sobrejetora se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 0$;
- (b) T é sobrejetora se, e somente se, $a \neq 1$ ou $b \neq 0$;
- (c) T é injetora se, e somente se, $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
- (d) T é sobrejetora;
- (e) T é injetora se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 0$.

Q14. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

e seja $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$, onde A^t denota a transposta da matriz A . Temos que $\dim(S^\perp)$ é igual a:

- (a) 2;
- (b) 0;
- (c) 4;
- (d) 3;
- (e) 1.

Q15. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um subespaço de V , $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de W e $v \in V$. Suponha que:

$$\|e_1\| = 1, \quad \|e_2\| = \|e_3\| = \sqrt{2},$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = -1, \quad \langle e_2, e_3 \rangle = 1;$$

suponha também que:

$$\text{proj}_{e_1} v = 2e_1, \quad \text{proj}_{e_2} v = 0, \quad \text{proj}_{e_3} v = 2e_3.$$

Se $w = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ é o elemento de W mais próximo de v , então $a + b + c$ é igual a:

- (a) 12;
- (b) 18;
- (c) 14;
- (d) 20;
- (e) 16.

Q16. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de V com $W \neq V$. Considere a aplicação $T : V \rightarrow V$ definida por:

$$T(v) = \text{proj}_W v, \quad v \in V.$$

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) $V = \text{Im}(T) \oplus (\text{Im}(T))^\perp$;
- (b) $\text{Im}(T) = W$;
- (c) $\text{Ker}(T) = W^\perp$;
- (d) $V = \text{Ker}(T) \oplus (\text{Ker}(T))^\perp$;
- (e) $\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, para todos $v_1, v_2 \in V$.