Q1. Considere o espaço vetorial $C([-1,1])$ munido do produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in C([-1,1]).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $p(x) = a + bx$ é o polinômio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima $f(x) = e^x$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{e^2+5}{e}$;
(b) $\frac{3}{e}$;
(c) $\frac{e^2+5}{2e}$;
(d) $\frac{e^2-1}{2e}$;
(e) $\frac{2}{e}$.

Q2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$T(1,1,1) = (1,0,0), \quad T(0,1,2) = (0,1,1), \quad T(1,1,0) = (1,1,0).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $T(1,0,0) = (1,-2,-1)$, $T(0,1,0) = (0,5,4)$;
(b) $T(1,0,0) = (-1,-2,0)$, $T(0,1,0) = (0,2,3)$;
(c) $T(1,0,0) = (2,-1,-2)$, $T(0,1,0) = (0,3,1)$;
(d) $T(1,0,0) = (1,-2,-1)$, $T(0,1,0) = (0,3,1)$;
(e) $T(1,0,0) = (2,-1,-2)$, $T(0,1,0) = (0,2,3)$.

Q3. Seja $\mathfrak{C}$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tais que:

$$T(1+x+x^2) = (1,0,0), \quad T(1-x+x^2) = (0,1,0), \quad T(2+2x^2) = (1,1,0).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) existe exatamente uma transformação linear T no conjunto $\mathfrak{C}$ cuja imagem é $[(1,0,0),(0,1,0)]$ e tal que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$;
(b) existe exatamente uma transformação linear injetora no conjunto $\mathfrak{C}$;
(c) o conjunto $\mathfrak{C}$ é vazio;
(d) existem infinitas transformações lineares sobrejetoras no conjunto $\mathfrak{C}$;
(e) existem infinitas transformações lineares injetoras no conjunto $\mathfrak{C}$.

Q4. Seja V um espaço vetorial de dimensão 33. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que:

$$10 \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) - 5 \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = -15;$$

(II) existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$;

(III) não existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que:

$$V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(b) todas as afirmações são falsas;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q5. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 4 e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de V. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : V \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(e_1) = 1, \quad T(e_2) = ax + x^2, \quad T(e_3) = 1 + x + x^2, \quad T(e_4) = bx^2.$$

Pode-se afirmar que:

(a) T é sobrejetora;
(b) T é injetora se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 0$;
(c) T é injetora se, e somente se, $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
(d) T é sobrejetora se, e somente se, $a \neq 1$ ou $b \neq 0$;
(e) T é sobrejetora se, e somente se, $a \neq 2$ e $b \neq 0$.

Q6. Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = -a_1 a_2 + b_1 b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 3a_1 a_2 - 2a_1 b_2 - 2a_2 b_1 - 2b_1 b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = a_1 a_2 + 2a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_1 b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de V com $W \neq V$. Considere a aplicação $T : V \to V$ definida por:

$$T(v) = \operatorname{proj}_W v, \quad v \in V.$$

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) $V = \operatorname{Im}(T) \oplus \big(\operatorname{Im}(T)\big)^\perp$;
(b) $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \big(\operatorname{Ker}(T)\big)^\perp$;
(c) $\operatorname{Im}(T) = W$;
(d) $\operatorname{Ker}(T) = W^\perp$;
(e) $\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, para todos $v_1, v_2 \in V$.

Q8. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b + 5c, -a - 2b + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathrm{Im}(T) = [(1, -1, 5), (0, 2, -1)]$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$;
(b) $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, -1), (1, 5, 1)]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [-3 + 2x + x^2]$;
(c) $\mathrm{Im}(T) = [(-3, 2, 1)]$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$;
(d) $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1, -1), (1, 3, 4)]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [-3 + 2x + x^2]$;
(e) $\mathrm{Im}(T) = [(-3, 2, 1)]$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

Q9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e sejam v_1, v_2 e v_3 os vetores dados por:

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (-1, 2, 3, -1), \quad v_3 = (0, 1, -1, 1).$$

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt a $\{v_1, v_2, v_3\}$, obtém-se um conjunto ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ com $w_1 = v_1$. Se s denota a soma das coordenadas do vetor w_2 e t denota a soma das coordenadas do vetor w_3, então:

(a) $s = -1$ e $t = \frac{27}{13}$;
(b) $s = -1$ e $t = 18$;
(c) $s = 1$ e $t = 18$;
(d) $s = 1$ e $t = \frac{14}{13}$;
(e) $s = 1$ e $t = \frac{27}{13}$.

Q10. Considere as seguintes afirmações:

(I) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, então para todos $v, w \in V$ vale que $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$ se, e somente se, existe λ real não negativo tal que $v = \lambda w$ ou $w = \lambda v$;

(II) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, então para todos $v, w \in V$ vale que $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ se, e somente se, v e w são linearmente dependentes;

(III) para quaisquer números reais positivos a_1, a_2, a_3, a_4, vale que:

$$\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\Big)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq 16.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são falsas;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^8$ munido do seu produto interno usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e para cada $u \in \mathbb{R}^8$ seja $P_u : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $P_u(x) = \langle u, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^8$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

e seja $A : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $A(p) = p''$, para todo $p \in P(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) para qualquer $u \in \mathbb{R}^8$ não nulo, vale que $\dim\big(\mathrm{Ker}(P_u)\big) = 7$;
(b) $T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
(c) para qualquer $u \in \mathbb{R}^8$ não nulo e qualquer subespaço W de $\mathbb{R}^8$ tal que $\mathbb{R}^8 = [u] \oplus W$, vale que $W \subset \mathrm{Ker}(P_u)$;
(d) A é sobrejetora;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = 2$.

Q12. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 2a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + b_1b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Se $S = [(1, -1)]$, então $S^\perp$ é igual a:

(a) $[(2, 1)]$;
(b) $[(3, 2)]$;
(c) $[(1, 1)]$;
(d) $[(2, 3)]$;
(e) $[(1, 2)]$.

Q13. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja:

$$S = \big\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - c = 0 \text{ e } -3a + b + 2d = 0\big\}.$$

Temos que $S^\perp$ é igual a:

(a) $[(0, 1, -3, 2)]$;
(b) $[(1, 0, -1, 0), (0, 1, -3, 2)]$;
(c) $[(1, 0, -1, 0)]$;
(d) $[(1, 0, -1, 0), (0, 2, -3, 2)]$;
(e) $[(1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, 2)]$.

Q14. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um subespaço de V, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de W e $v \in V$. Suponha que:

$$\|e_1\| = 1, \quad \|e_2\| = \|e_3\| = \sqrt{2},$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = -1, \quad \langle e_2, e_3 \rangle = 1;$$

suponha também que:

$$\operatorname{proj}_{e_1} v = 2e_1, \quad \operatorname{proj}_{e_2} v = 0, \quad \operatorname{proj}_{e_3} v = 2e_3.$$

Se $w = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ é o elemento de W mais próximo de v, então $a + b + c$ é igual a:

(a) 16;
(b) 14;
(c) 20;
(d) 18;
(e) 12.

Q15. Considere as seguintes afirmações:

(I) existem um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, um subespaço W de V, vetores $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, com $w_1 \neq w_2$, tais que $v - w_1 \in W^\perp$ e $v - w_2 \in W^\perp$;

(II) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de V e $v \in V$ satisfaz $\langle v, e_i \rangle = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então $v = 0$;

(III) se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W é um subespaço de V e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de V, então para todo $v \in V$ vale que:

$$\operatorname{proj}_W v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} \, e_i.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q16. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

e seja $S = \big\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A^{\mathrm{t}} = A \big\}$, onde A^{t} denota a transposta da matriz A. Temos que $\dim(S^\perp)$ é igual a:

(a) 3;
(b) 4;
(c) 1;
(d) 0;
(e) 2.