

Q1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e sejam $T : V \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow V$ operadores lineares. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se T e S são operadores simétricos, então o operador $T + S$ é diagonalizável;
- (II) se T é um operador simétrico invertível, então o operador T^{-1} também é simétrico;
- (III) T é invertível se, e somente se, 0 não é um autovalor de T .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q2. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ e $S : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ as transformações lineares definidas por:

$$T(p) = p', \quad p \in P_2(\mathbb{R}),$$

$$S(a_0 + a_1x) = a_0 + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

e seja $H : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $H = S \circ T$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) $\text{Ker}(H - I) = [x^2]$, onde I denota o operador identidade de $P_2(\mathbb{R})$;
- (b) H é diagonalizável;
- (c) os únicos autovalores de H são 0 e 1 ;
- (d) o polinômio característico de H é $p(t) = -t(1 - t)^2$;
- (e) $\dim(\text{Ker}(H)) = 1$.

Q3. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 2), (1, -1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\},$$

de \mathbb{R}^2 e de \mathbb{R}^3 , respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(1, 2)$ é igual a:

- (a) $(1, 1, 4)$;
- (b) $(-7, -1, 3)$;
- (c) $(1, -1, 3)$;
- (d) $(3, -1, 10)$;
- (e) $(-9, 5, 13)$.

Q4. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x + 1, x^2 + x, x^3 - 1\}, \quad \mathcal{C} = \{2, x - 1, x^2 + 1\},$$

de $P_3(\mathbb{R})$ e de $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

O núcleo de T é gerado pelo vetor:

- (a) $2x^3 - x^2 + 2x + 4$;
- (b) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$;
- (c) $3x^3 + x^2 - 2x + 1$;
- (d) $3x^3 + 3x^2 - x + 2$;
- (e) $3x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Q5. Sejam a e b números reais distintos, V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja $p(x) = (x - a)^2(b - x)$. Sejam v_1, v_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor a e w_1, w_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor b . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) o conjunto $\{v_1, w_1\}$ é linearmente independente;
- (b) $v_1 + w_1$ é um autovetor de T ;
- (c) o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente dependente;
- (d) se $v_1 + v_2 \neq 0$, então $v_1 + v_2$ é um autovetor de T ;
- (e) se o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, então T é diagonalizável.

Q6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (3x - y, 2x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que $T^{2014}(0, 1)$ é igual a:

- (a) $(1, 1 - 3^{2014})$;
- (b) $(1 - 2^{2014}, 2^{2015})$;
- (c) $(1 - 2^{2015}, 1 - 3^{2014})$;
- (d) $(2^{2015}, 2 - 3^{2014})$;
- (e) $(1 - 2^{2014}, 2 - 2^{2014})$.

Q7. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se U é um espaço vetorial de dimensão 75, então existe um operador linear $T : U \rightarrow U$ tal que:

$$\text{Ker}(T - \text{I}) \cap \text{Ker}(T - 2\text{I}) \cap \text{Ker}(T - 3\text{I}) \neq \{0\},$$

onde I denota o operador identidade de U ;

- (II) se o espaço vetorial \mathbb{R}^4 está munido do seu produto interno canônico, U é um subespaço de \mathbb{R}^4 tal que $\dim(U) = 1$ e $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é o operador linear definido por $T(v) = \text{proj}_U v$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$, então existe uma base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- (III) se $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ é um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = (t - 2)^4(t + 3)^2$, então T é invertível.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q8. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do produto interno:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico (com respeito ao produto interno dado) cujo polinômio característico é $p(t) = (2 - t)(t - 1)^2$. Suponha que $T(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$. Assinale a alternativa correta:

- (a) $T(x, y, z) = (\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y + z, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - z, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (b) $T(x, y, z) = (\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (c) $T(x, y, z) = (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + z, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - z, x - y + z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (d) $T(x, y, z) = (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, x - y + z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (e) $T(x, y, z) = (\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Q9. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 munido do seu produto interno canônico. Seja \mathcal{B} a base de \mathbb{R}^2 dada por:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1), (1, 2)\},$$

e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base \mathcal{B} é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é simétrico;
- (II) T não é diagonalizável;
- (III) T é diagonalizável, mas não é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) nenhuma das afirmações é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (3x + y + z, y, x + 2y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

A soma dos autovalores de T é igual a:

- (a) 6;
- (b) 7;
- (c) 3;
- (d) 2;
- (e) 5.

Q11. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de \mathbb{R}^3 . Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base \mathcal{B} é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Se $\text{Ker}(T) = [e_1 + e_2 + e_3]$, o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t-2)^2$ e T é diagonalizável, então $a^2 - b^2 + c^2$ é igual a:

- (a) 7;
- (b) 9;
- (c) 4;
- (d) 1;
- (e) 3.

Q12. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (ax - y, x + y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que T é diagonalizável se, e somente se:

- (a) $a \leq -1$ ou $a \geq 3$;
- (b) $a < -1$ ou $a > 3$;
- (c) $0 \leq a \leq 2$;
- (d) $a < 0$ ou $a > 2$;
- (e) $-1 < a < 3$.

Q13. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \rightarrow U$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é sobrejetor se, e somente se, para toda base \mathcal{B} de U , vale que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diferente de zero;
- (II) se T não for injetor, então existe uma base \mathcal{B} de U tal que, para toda base \mathcal{C} de U , a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ contém uma coluna de zeros;
- (III) se $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base de U , $\mathcal{E} = \{e_2, e_3, e_1\}$ e:

$$[T]_{\mathcal{D}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $T^3 = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q14. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A respeito delas, pode-se afirmar que:

- (a) apenas A e C são diagonalizáveis;
- (b) apenas B e C são diagonalizáveis;
- (c) apenas A e B são diagonalizáveis;
- (d) todas são diagonalizáveis;
- (e) nenhuma delas é diagonalizável.

Q15. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(p) = (p(0), p'(1), p''(2)), \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

Sejam $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e \mathcal{C} a base canônica de \mathbb{R}^3 . Se a matriz de T em relação às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} é:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

então $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$ é igual a:

- (a) $2x^2 - 2x + 3$;
- (b) $2x^2 - 3$;
- (c) $x^2 + 3$;
- (d) $x^2 - 2x + 2$;
- (e) $-x^2 + 2x + 2$.

Q16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (x + 2y, -y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e seja $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que:

$$[T \circ S]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de \mathbb{R}^2 . Denote por I o operador identidade de \mathbb{R}^2 . A soma dos elementos da diagonal principal da matriz $[5(S^2 + I)]_{\text{can}}$ é igual a:

- (a) 7;
- (b) 12;
- (c) -7;
- (d) 5;
- (e) -5.