

Nesta prova considera-se fixada uma orientação de V^3 e um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ em E^3 , em que $\mathcal{E}$ é uma base ortonormal positiva de V^3 . A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e planos e coordenadas de pontos de E^3 estão escritas no sistema Σ e coordenadas de vetores de V^3 estão escritas na base $\mathcal{E}$.

Q1. Considere as seguintes afirmações:

- (I) existe um espaço vetorial que contém um conjunto linearmente independente com 6 elementos e um conjunto gerador com 5 elementos;
- (II) se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial V e $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de S_1 e de S_2 , respectivamente, então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ gera $S_1 + S_2$;
- (III) se um espaço vetorial V tem dimensão igual a 6 e um subconjunto de V com 6 elementos gera V , então esse subconjunto é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

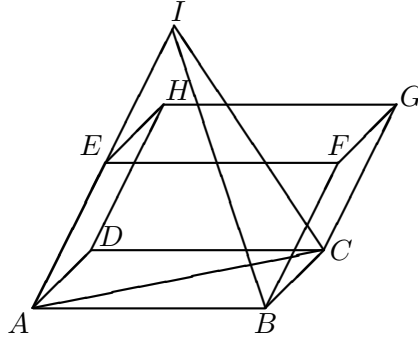
Q2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere os subespaços S_1 e S_2 de $P_2(\mathbb{R})$ dados por:

$$S_1 = [a + t + t^2, b + 3t + at^2], \quad S_2 = [1 - t^2, 1 + 3t].$$

Se $S_1 = S_2$, então $a + b$ é igual a:

- (a) 2;
- (b) 1;
- (c) -1;
- (d) 0;
- (e) -2.

Q3. Considere em E^3 um paralelepípedo $\mathcal{P}$ de vértices A, B, C, D, E, F, G, H , em que $ABCD$ é uma face de $\mathcal{P}$. Seja $I \neq A$ um ponto da reta determinada por A e E e seja $\mathcal{T}$ o tetraedro de vértices A, B, C e I , como ilustrado na figura abaixo:



Denote por $d(P, Q)$ a distância entre dois pontos $P, Q \in E^3$. Temos que o volume de $\mathcal{P}$ é igual ao dobro do volume de $\mathcal{T}$ se, e somente se, o quociente $d(A, I)/d(A, E)$ é igual a:

- (a) 3;
- (b) 8;
- (c) 12;
- (d) 6;
- (e) 2.

Q4. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$. Se $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = 4$ e se os vetores $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$ e $\vec{v}$ têm sentidos opostos, então $\vec{v} \cdot \vec{w}$ é igual a:

- (a) $-3\sqrt{5}$;
- (b) $-2\sqrt{5}$;
- (c) $2\sqrt{5}$;
- (d) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$;
- (e) $3\sqrt{5}$.

Q5. Sejam r e s retas em E^3 com vetores diretores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente. Sejam A um ponto de r e B um ponto de s . Temos que as retas r e s são reversas se, e somente se:

- (a) os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes e os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente independentes;
- (b) os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes e os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente independentes;
- (c) os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente independentes;
- (d) os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes e os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente dependentes;
- (e) os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes e os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente dependentes.

Q6. Dadas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de V^3 , denotamos por $M_{\mathcal{BC}}$ a matriz tal que:

$$M_{\mathcal{BC}}[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}},$$

para todo $\vec{v} \in V^3$. Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ bases de V^3 tais que:

$$M_{\mathcal{BF}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{GF}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, $\vec{g}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)_{\mathcal{B}}$, $\vec{g}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{g}_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)_{\mathcal{B}}$, então $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3$ é igual a:

- (a) -2 ;
- (b) 0 ;
- (c) -1 ;
- (d) 2 ;
- (e) 1 .

Q7. Considere os vetores:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

no espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa que contém um vetor que é combinação linear de A_1 , A_2 e A_3 :

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Q8. Considere as retas:

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s : X = (0, 1, 0) + \mu(0, 1, 1), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

em E^3 . Seja t a reta que é perpendicular a r e a s . Assinale a alternativa que contém um ponto da reta t :

(a) $(1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$;

(b) $(\frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3})$;

(c) $(-\frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3})$;

(d) $(-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3})$;

(e) $(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3})$.

Q9. Considere em E^3 um triângulo de vértices A , B e C . Denote por M o ponto médio do lado BC e por N o ponto do lado AB tal que:

$$\|\overrightarrow{AN}\| = 2\|\overrightarrow{NB}\|.$$

Seja X o ponto de interseção dos segmentos AM e CN . Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AM}$, então λ é igual a:

- (a) $\frac{4}{5}$;
- (b) $\frac{2}{5}$;
- (c) $\frac{5}{3}$;
- (d) $\frac{2}{3}$;
- (e) $\frac{1}{5}$.

Q10. Considere as retas:

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 3 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s : x - 1 = -y + 1 = \frac{z - 4}{2}$$

em E^3 . A distância entre r e s é igual a:

- (a) $\frac{\sqrt{14}}{2}$;
- (b) $2\sqrt{14}$;
- (c) $\frac{\sqrt{14}}{7}$;
- (d) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$;
- (e) $\sqrt{14}$.

Q11. Considere a base $\mathcal{B}$ de $P_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{4 + 3t + 2t^2 + t^3, 3 + 2t + t^2, 2 + t, 1\}.$$

Se $p(t) = t^2 + t^3$ e se (a, b, c, d) denotam as coordenadas de p na base $\mathcal{B}$, então $a + b + c + d$ é igual a:

- (a) 2;
- (b) 0;
- (c) 4;
- (d) 3;
- (e) 1.

Q12. Considere o ponto $P = (1, 1, 1) \in E^3$, os planos

$$\pi_1 : 3x - y + z - 3 = 0, \quad \pi_2 : x - y - z - 3 = 0$$

em E^3 e seja r a reta dada pela interseção de π_1 e π_2 . Seja Q o ponto simétrico de P em relação à reta r , isto é, a distância de P a r é igual à distância de Q a r e a reta determinada por P e Q é perpendicular a r . Se $Q = (a, b, c)$, então $a + b + c$ é igual a:

- (a) $-\frac{11}{3}$;
- (b) 3;
- (c) $\frac{1}{3}$;
- (d) 1;
- (e) $\frac{11}{3}$.

Q13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = b, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ bx_1 + x_2 + x_3 = 2, \end{cases}$$

nas incógnitas x_1, x_2 e x_3 . Pode-se afirmar que:

- (a) o sistema não tem solução;
- (b) se o sistema tem uma única solução, então $b = 2$;
- (c) se o sistema tem infinitas soluções, então $b = 1$;
- (d) se $a \neq 2$, então o sistema tem uma única solução;
- (e) se $b = 2$, então o sistema tem pelo menos uma solução.

Q14. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^5$ dados por:

$$S_1 = [(-1, 0, 1, -2, 4), (3, -2, 3, -4, -2), (2, -2, 1, -1, 2)],$$

$$S_2 = [(-3, 1, 0, -1, 7), (0, -1, 3, -5, 5), (1, 0, 3, -2, 2)].$$

Temos que $\dim(S_1 \cap S_2)$ e $\dim(S_1 + S_2)$ são iguais, respectivamente, a:

- (a) 2 e 4;
- (b) 1 e 5;
- (c) 0 e 6;
- (d) 1 e 4;
- (e) 2 e 3.

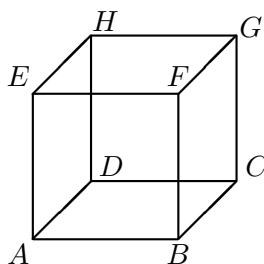
Q15. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3 tal que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_3\| = 1$, a medida do ângulo entre $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ seja igual a $\frac{\pi}{3}$ radianos e tal que os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ sejam ambos ortogonais a $\vec{e}_3$. Se

$$\vec{v} = (-1, 0, 2)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (1, 2, 3)_{\mathcal{B}},$$

então $\vec{v} \cdot \vec{w}$ é igual a:

- (a) 4;
- (b) 2;
- (c) 5;
- (d) 1;
- (e) 3.

Q16. Considere em E^3 um cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H , em que $ABCD$ e $ADHE$ são faces desse cubo e AB, AD e AE são arestas desse cubo, como ilustrado na figura abaixo:



Seja $\mathcal{B}$ a base de V^3 dada por $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{CH}\}$. Se $\overrightarrow{BD} = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$, então $a + b + c$ é igual a:

- (a) 2;
- (b) -2;
- (c) 0;
- (d) -4;
- (e) 4.