Nesta prova considera-se fixada uma orientação de $\mathbf{V}^3$ e um sistema de coordenadas $\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{O}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ em $\mathbf{E}^3$, em que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbf{V}^3$. A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e planos e coordenadas de pontos de $\mathbf{E}^3$ estão escritas no sistema $\boldsymbol{\Sigma}$ e coordenadas de vetores de $\mathbf{V}^3$ estão escritas na base $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

Q1. Considere os subespaços U e W de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dados por:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a + b - f = b + c - d = 0 \right\},$$
$$W = \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Temos que $\dim(U) + \dim(U + W)$ é igual a:

(a) 8;
(b) 10;
(c) 7;
(d) 6;
(e) 9.

Q2. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere o subespaço S de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ dado por:

$$S = [\cos t, \cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, 3, \cos(2t), 1 - 5\cos t].$$

A dimensão de S é igual a:

(a) 4;
(b) 5;
(c) 3;
(d) 6;
(e) 2.

Q3. Considere o ponto $P = (1, 1, 1) \in E^3$ e o plano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0$$

em E^3. Se $Q = (a, b, c)$ é o ponto de π mais próximo de P, então $a + b + c$ é igual a:

(a) 1;
(b) -1;
(c) 2;
(d) 3;
(e) 0.

Q4. Sejam S_1 e S_2 subespaços de $P_{10}(\mathbb{R})$ tais que $S_1 + S_2 = P_{10}(\mathbb{R})$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2)$. Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S_1) \geq 7$;
(b) a soma $S_1 + S_2$ não é direta;
(c) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 3$;
(d) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 6$;
(e) a soma $S_1 + S_2$ é direta.

Q5. Seja V um espaço vetorial e sejam dados $v, w, z_1, \ldots, z_k \in V$. Suponha que os vetores $z_1, \ldots, z_k$ sejam dois a dois distintos. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\{z_1, \ldots, z_k\}$ é linearmente independente e $\dim\big([v, z_1, \ldots, z_k]\big) = k$, então v é combinação linear de $z_1, \ldots, z_k$;
(II) se $V = [v, z_1, \ldots, z_k]$ e $V \neq [z_1, \ldots, z_k]$, então $\dim(V) > k$;
(III) se $w \in [v, z_1, \ldots, z_k]$ e $w \notin [z_1, \ldots, z_k]$, então $v \in [w, z_1, \ldots, z_k]$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q6. Considere os vetores:

$$\vec{v} = (-1, 2, 3), \quad \vec{w} = (2, 1, 1)$$

em V^3 e seja $\vec{z} \in V^3$ tal que o conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ seja linearmente dependente. Assinale a alternativa correspondente a um vetor que **pode** ser igual a $\vec{z}$:

(a) $(-3, 1, 2)$;
(b) $(-3, 2, 3)$;
(c) $(8, 2, 1)$;
(d) $(3, 2, 2)$;
(e) $(1, 1, 1)$.

Q7. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ uma base de V^3. Considere as seguintes afirmações:

(I) se a base $\mathcal{B}$ é positiva, então $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{z} = \vec{w} \cdot \vec{z} = 0$;
(II) se a base $\mathcal{B}$ é negativa, então a base $\{\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}\}$ é positiva;
(III) se existe uma base $\mathcal{C}$ de V^3 tal que a matriz de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$ tem determinante negativo, então a base $\mathcal{B}$ é negativa.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(c) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q8. Considere a base $\mathcal{B}$ de $P_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathcal{B} = \left\{1 + t + t^2 + t^3, -1 + t + t^2 - t^3, 1 + t + t^2, 1 + t + t^3\right\}.$$

Seja $p(t) = 1 + 2t$ e sejam (a, b, c, d) as coordenadas de p na base $\mathcal{B}$. Temos que $2a + 2b + c + d$ é igual a:

(a) 2;
(b) 1;
(c) $\frac{1}{2}$;
(d) $\frac{3}{2}$;
(e) $\frac{5}{2}$.

Q9. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e considere os vetores:

$$f(t) = 1 + \alpha t - t^2 + 2t^3, \quad g(t) = t + t^2 + \alpha t^3, \quad h(t) = 1 + 4t + \beta t^2 + 6t^3,$$

no espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$. Se h é combinação linear de f e g, então $\alpha - \beta$ é igual a:

(a) -1;
(b) -2;
(c) 2;
(d) 1;
(e) 0.

Q10. Considere em E^3 a reta r e o plano π dados por:

$$r : X = (2,0,0) + \lambda(1,1,0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\pi : X = (1,0,0) + \mu(0,1,-1) + \rho(1,-1,0), \quad \mu, \rho \in \mathbb{R}.$$

Sejam P_1 e P_2 os pontos de r cuja distância até o plano π é igual a $\sqrt{3}$ e sejam s_1 e s_2 as retas perpendiculares a π que passam por P_1 e P_2, respectivamente. A distância entre s_1 e s_2 é igual a:

(a) $\sqrt{3}$;
(b) 2;
(c) $\sqrt{6}$;
(d) $\sqrt{5}$;
(e) $\sqrt{7}$.

Q11. Considere os pontos:

$$A = (2,0,3), \quad B = (2,1,0), \quad D = (2,-1,-2)$$

em E^3 e o vetor $\vec{u} = (1,1,1)$ em V^3. Seja C o ponto de E^3 tal que:

$$\overrightarrow{AC} = \operatorname{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{AD}.$$

A área do triângulo ABC é igual a:

(a) $\sqrt{26}$;
(b) $2\sqrt{29}$;
(c) $2\sqrt{19}$;
(d) $\sqrt{29}$;
(e) $\sqrt{19}$.

Q12. Considere o tetraedro em E^3 cujos vértices são os pontos $(0,1,1)$, $(1,2,1)$, $(0,1,2)$ e $(1,1,1)$. O volume desse tetraedro é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$;
(b) 1;
(c) $\frac{1}{6}$;
(d) $\frac{1}{3}$;
(e) $\frac{2}{3}$.

Q13. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$ e $\|\vec{w} \wedge \vec{v}\| = 3$. Os possíveis valores para $\vec{v} \cdot \vec{w}$ são:

(a) apenas $2\sqrt{3}$;
(b) apenas $3\sqrt{3}$ e $-3\sqrt{3}$;
(c) apenas $4\sqrt{3}$ e $-4\sqrt{3}$;
(d) apenas $4\sqrt{3}$;
(e) apenas $3\sqrt{3}$.

Q14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n e sejam S_1 e S_2 subespaços de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) se a soma $S_1 + S_2$ é direta e se $v \in S_1$ e $w \in S_2$ são tais que $v + w = 0$, então $v = 0$ e $w = 0$;
(II) se $\dim(S_1) + \dim(S_2) = n$, então a soma $S_1 + S_2$ é direta;
(III) se $\mathcal{B}$ é uma base de S_1 e $\mathcal{C}$ é uma base de S_2, então a união $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ tem no máximo n elementos.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q15. Considere um triângulo ABC em E^3. Seja P o ponto do segmento AB tal que o comprimento do segmento AP seja igual a $\frac{1}{5}$ do comprimento do segmento AB e seja Q o ponto do segmento AC tal que o comprimento do segmento AQ seja o triplo do comprimento do segmento QC. Se X denota o ponto de encontro dos segmentos BQ e CP e se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que:

$$X = A + a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC},$$

então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{5}{17}$;
(b) $\frac{16}{17}$;
(c) $\frac{11}{17}$;
(d) $\frac{4}{17}$;
(e) $\frac{13}{17}$.

Q16. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1, -1, 2), \quad \vec{w} = (3, 1, 1), \quad \vec{z} = (a, b, c)$$

em V^3. Suponha que $\|\vec{z}\| = 1$, que $\vec{z}$ seja ortogonal a $\vec{v}$, que o conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ seja linearmente dependente e que o ângulo entre os vetores $\vec{z}$ e $\vec{w}$ seja obtuso. Temos que $a + b + c$ é igual a:

(a) -11;
(b) $-\frac{11}{5\sqrt{5}}$;
(c) 11;
(d) $-\frac{11}{5\sqrt{3}}$;
(e) $\frac{11}{5\sqrt{3}}$.