

Nesta prova considera-se fixada uma orientação de V^3 e um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ em E^3 , em que $\mathcal{E}$ é uma base ortonormal positiva de V^3 . A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e planos e coordenadas de pontos de E^3 estão escritas no sistema Σ e coordenadas de vetores de V^3 estão escritas na base $\mathcal{E}$.

Q1. Seja V um espaço vetorial e sejam dados $v, w, z_1, \dots, z_k \in V$. Suponha que os vetores $z_1, \dots, z_k$ sejam dois a dois distintos. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\{z_1, \dots, z_k\}$ é linearmente independente e $\dim([v, z_1, \dots, z_k]) = k$, então v é combinação linear de $z_1, \dots, z_k$;
- (II) se $V = [v, z_1, \dots, z_k]$ e $V \neq [z_1, \dots, z_k]$, então $\dim(V) > k$;
- (III) se $w \in [v, z_1, \dots, z_k]$ e $w \notin [z_1, \dots, z_k]$, então $v \in [w, z_1, \dots, z_k]$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q2. Considere os pontos:

$$A = (2, 0, 3), \quad B = (2, 1, 0), \quad D = (2, -1, -2)$$

em E^3 e o vetor $\vec{u} = (1, 1, 1)$ em V^3 . Seja C o ponto de E^3 tal que:

$$\overrightarrow{AC} = \text{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{AD}.$$

A área do triângulo ABC é igual a:

- (a) $\sqrt{26}$;
- (b) $2\sqrt{19}$;
- (c) $2\sqrt{29}$;
- (d) $\sqrt{19}$;
- (e) $\sqrt{29}$.

Q3. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$ e $\|\vec{w} \wedge \vec{v}\| = 3$. Os possíveis valores para $\vec{v} \cdot \vec{w}$ são:

- (a) apenas $2\sqrt{3}$;
- (b) apenas $3\sqrt{3}$ e $-3\sqrt{3}$;
- (c) apenas $4\sqrt{3}$;
- (d) apenas $3\sqrt{3}$;
- (e) apenas $4\sqrt{3}$ e $-4\sqrt{3}$.

Q4. Considere os subespaços U e W de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ dados por:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a + b - f = b + c - d = 0 \right\},$$

$$W = \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Temos que $\dim(U) + \dim(U + W)$ é igual a:

- (a) 9;
- (b) 8;
- (c) 6;
- (d) 7;
- (e) 10.

Q5. Considere um triângulo ABC em E^3 . Seja P o ponto do segmento AB tal que o comprimento do segmento AP seja igual a $\frac{1}{5}$ do comprimento do segmento AB e seja Q o ponto do segmento AC tal que o comprimento do segmento AQ seja o triplo do comprimento do segmento QC . Se X denota o ponto de encontro dos segmentos BQ e CP e se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que:

$$X = A + a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC},$$

então $a + b$ é igual a:

- (a) $\frac{11}{17}$;
- (b) $\frac{16}{17}$;
- (c) $\frac{5}{17}$;
- (d) $\frac{13}{17}$;
- (e) $\frac{4}{17}$.

Q6. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e considere o subespaço S de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ dado por:

$$S = [\cos t, \cos^2 t, \sin^2 t, 3, \cos(2t), 1 - 5 \cos t].$$

A dimensão de S é igual a:

- (a) 6;
- (b) 4;
- (c) 5;
- (d) 2;
- (e) 3.

Q7. Considere a base $\mathcal{B}$ de $P_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2 + t^3, -1 + t + t^2 - t^3, 1 + t + t^2, 1 + t + t^3\}.$$

Seja $p(t) = 1 + 2t$ e sejam (a, b, c, d) as coordenadas de p na base $\mathcal{B}$. Temos que $2a + 2b + c + d$ é igual a:

- (a) $\frac{1}{2}$;
- (b) 1;
- (c) 2;
- (d) $\frac{3}{2}$;
- (e) $\frac{5}{2}$.

Q8. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e considere os vetores:

$$f(t) = 1 + \alpha t - t^2 + 2t^3, \quad g(t) = t + t^2 + \alpha t^3, \quad h(t) = 1 + 4t + \beta t^2 + 6t^3,$$

no espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$. Se h é combinação linear de f e g , então $\alpha - \beta$ é igual a:

- (a) 0;
- (b) -2;
- (c) 1;
- (d) -1;
- (e) 2.

Q9. Considere o tetraedro em E^3 cujos vértices são os pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$ e $(1, 1, 1)$. O volume desse tetraedro é igual a:

- (a) $\frac{2}{3}$;
- (b) $\frac{1}{2}$;
- (c) $\frac{1}{3}$;
- (d) 1;
- (e) $\frac{1}{6}$.

Q10. Considere os vetores:

$$\vec{v} = (-1, 2, 3), \quad \vec{w} = (2, 1, 1)$$

em V^3 e seja $\vec{z} \in V^3$ tal que o conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ seja linearmente dependente. Assinale a alternativa correspondente a um vetor que **pode** ser igual a $\vec{z}$:

- (a) $(-3, 2, 3)$;
- (b) $(1, 1, 1)$;
- (c) $(-3, 1, 2)$;
- (d) $(3, 2, 2)$;
- (e) $(8, 2, 1)$.

Q11. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1, -1, 2), \quad \vec{w} = (3, 1, 1), \quad \vec{z} = (a, b, c)$$

em V^3 . Suponha que $\|\vec{z}\| = 1$, que $\vec{z}$ seja ortogonal a $\vec{v}$, que o conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ seja linearmente dependente e que o ângulo entre os vetores $\vec{z}$ e $\vec{w}$ seja obtuso. Temos que $a + b + c$ é igual a:

- (a) $-\frac{11}{5\sqrt{3}}$;
- (b) $-\frac{11}{5\sqrt{5}}$;
- (c) 11;
- (d) $\frac{11}{5\sqrt{3}}$;
- (e) -11.

Q12. Considere em E^3 a reta r e o plano π dados por:

$$r : X = (2, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\pi : X = (1, 0, 0) + \mu(0, 1, -1) + \rho(1, -1, 0), \quad \mu, \rho \in \mathbb{R}.$$

Sejam P_1 e P_2 os pontos de r cuja distância até o plano π é igual a $\sqrt{3}$ e sejam s_1 e s_2 as retas perpendiculares a π que passam por P_1 e P_2 , respectivamente. A distância entre s_1 e s_2 é igual a:

- (a) $\sqrt{6}$;
- (b) 2;
- (c) $\sqrt{3}$;
- (d) $\sqrt{7}$;
- (e) $\sqrt{5}$.

Q13. Considere o ponto $P = (1, 1, 1) \in E^3$ e o plano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0$$

em E^3 . Se $Q = (a, b, c)$ é o ponto de π mais próximo de P , então $a + b + c$ é igual a:

- (a) 0;
- (b) -1;
- (c) 3;
- (d) 2;
- (e) 1.

Q14. Sejam S_1 e S_2 subespaços de $P_{10}(\mathbb{R})$ tais que $S_1 + S_2 = P_{10}(\mathbb{R})$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2)$. Pode-se afirmar que:

- (a) a soma $S_1 + S_2$ não é direta;
- (b) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 6$;
- (c) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 3$;
- (d) a soma $S_1 + S_2$ é direta;
- (e) $\dim(S_1) \geq 7$.

Q15. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ uma base de V^3 . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se a base $\mathcal{B}$ é positiva, então $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{z} = \vec{w} \cdot \vec{z} = 0$;
- (II) se a base $\mathcal{B}$ é negativa, então a base $\{\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}\}$ é positiva;
- (III) se existe uma base $\mathcal{C}$ de V^3 tal que a matriz de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$ tem determinante negativo, então a base $\mathcal{B}$ é negativa.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

Q16. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n e sejam S_1 e S_2 subespaços de V . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se a soma $S_1 + S_2$ é direta e se $v \in S_1$ e $w \in S_2$ são tais que $v + w = 0$, então $v = 0$ e $w = 0$;
- (II) se $\dim(S_1) + \dim(S_2) = n$, então a soma $S_1 + S_2$ é direta;
- (III) se $\mathcal{B}$ é uma base de S_1 e $\mathcal{C}$ é uma base de S_2 , então a união $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ tem no máximo n elementos.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.