Q1. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$S_1 = [(1,0,-1,0),(1,2,1,2)], \quad S_2 = [(0,1,1,1),(1,0,0,1)].$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(b) $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(c) $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(d) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(e) $\dim(S_1 + S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$.

Resposta (a). Os geradores de S_1 são, evidentemente, LI, assim como os de S_2; logo $\dim S_1 = \dim S_2 = 2$. *Sabe-se que* $S_1 + S_2 = [(1,0,-1,0),(1,2,1,2),(0,1,1,1),(1,0,0,1)]$. *Para calcular a dimensão de $S_1 + S_2$, escalonamos a matriz A cujas linhas são os quatro geradores de $S_1 + S_2$,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *resultando, por exemplo, em* $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Como as linhas de R geram o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^4$ que as linhas de A, e as linhas não nulas de R são claramente LI, segue* $\dim(S_1 + S_2) = 3$. *Logo,* $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Q2. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \quad S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(b) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(c) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(d) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(e) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$.

Resposta (a). Uma matrix A de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ está em S_1 se, e somente se, existirem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Assim,* $S_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$. *Como os vetores nesse conjunto gerador são LI,* $\dim S_1 = 3$. *Sendo, também, LI os geradores de S_2, segue* $\dim S_2 = 3$. *Finalmente, um vetor B de S_2 é da forma* $B = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta + 2\gamma & \alpha + 3\gamma \\ \alpha & \alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix}$, *com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. O vetor B estará também em S_1 (e,* *consequentemente, em* $S_1 \cap S_2$*) se, e somente se,* $\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = \alpha + \beta = \alpha + \beta + 2\gamma \\ \alpha + 3\gamma = \alpha \end{cases}$, *donde segue* $\beta = \gamma = 0$. *Portanto,* $S_1 \cap S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$, *que tem dimensão igual a* 1.

Q3. Sejam S_1 e S_2 subespaços de $P_8(\mathbb{R})$ tais que $P_8(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2) + 1$. Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 5$;
(b) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 4$;
(c) a soma $S_1 + S_2$ não é direta;
(d) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 7$;
(e) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 6$.

Resposta (a). Sabe-se que $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2)$. *Como* $S_1 + S_2 = P_8(\mathbb{R})$, *segue* $\dim(S_1 + S_2) = \dim P_8(\mathbb{R}) = 9$. *Disso e do fato que* $\dim S_1 = \dim S_2 + 1$, *tem-se:* $\dim(S_1 \cap S_2) = 2 \dim S_2 + 1 - 9 = 2 \dim S_2 - 8$, *que certamente não é cinco, por ser par. Pode ser* 4*:* $S_1 = P_6(\mathbb{R}), S_2 = [1, x, x^2, x^3, x^7, x^8]$*; pode ser* 0*:* $S_1 = P_4(\mathbb{R}), S_2 = [x^5, x^6, x^7, x^8]$*; pode ser* 8*:* $S_1 = P_8(\mathbb{R}), S_2 = P_7(\mathbb{R})$*; pode ser* 6*:* $S_1 = P_7(\mathbb{R}), S_2 = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^8]$.

Q4. Sejam V um espaço vetorial, S_1 e S_2 subespaços de V, $\mathcal{B}_1$ uma base de S_1 e $\mathcal{B}_2$ uma base de S_2. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma base para $S_1 \cap S_2$ contida em $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$;
(II) se a interseção $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é vazia e a união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 + S_2$, então $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(III) se $V = S_1 + S_2$, então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é um conjunto gerador de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Resposta (a). (I) é falsa, por exemplo, se, em $\mathbb{R}^3$, *tivermos* $S_1 = [(1,1,0), (1,-1,0)]$ *e* $S_2 = [(0,1,1), (0,-1,1)]$, *então qualquer base de* $S_1 \cap S_2$ *é da forma* $\{(0, x, 0)\}$, *com* $x \neq 0$. *(II) é verdadeira, pois se* $v \in S_1 \cap S_2$, *então* $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_k w_k$, *com* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{B}_1$ *e* $w_1, \ldots, w_k \in \mathcal{B}_2$. *Daí, segue* $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n - \mu_1 w_1 - \cdots - \mu_k w_k = 0_V$. *Como* $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ *e* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *é LI, tem-se* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$. *Em particular,* $v = 0_V$. *Portanto,* $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$. *(III) é verdadeira, pois todo vetor de* V *é uma soma de uma combinação linear de elementos de* $\mathcal{B}_1$ *com uma combinação linear de elementos de* $\mathcal{B}_2$, *ou seja, é uma combinação linear de elementos de* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Q5. Considere o subconjunto C de $P_5(\mathbb{R})$ definido por:

$$C = \{1 + x, 1 + x + x^2 + x^4, x + x^2 + x^3 + x^4\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a um conjunto D tal que $C \cup D$ seja uma base de $P_5(\mathbb{R})$:

(a) $D = \{1, 1 + x + x^3 + x^4, x^5\}$;

(b) $D = \{0, 1, x - x^3 + x^5\}$;

(c) $D = \{1, 1 + x + x^2, 1 - x^3 - x^4\}$;

(d) $D = \{1, x + x^3, x^3 - x^4 - x^5\}$;

(e) $D = \{1 + x^2, 1 - x^5\}$.

Resposta (a). Como C é LI e $\dim P_5(\mathbb{R}) = 6$, D tem que conter 3 elementos. Isso elimina a alternativa (e). Ainda, (b) está eliminada, pois uma base não pode conter o vetor nulo de um espaço vetorial. Mais, elimina-se (c), uma vez que evidentemente não se tem x^5 como combinação linear dos elementos de $C \cup D$ neste caso. Resta verificar (a) e (d). Por inspeção, vemos que $x + x^3 = (1 + x) - (1 + x + x^2 + x^4) + (x + x^2 + x^3 + x^4)$, o que implica que, no caso (d), $C \cup D$ não é LI. Resta (a), que, de fato, é LI (e, por conter 6 elementos, uma base de $P_5(\mathbb{R})$), uma vez que, escalonando-se a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujas linhas são, neste caso, as coordenadas dos vetores de $C \cup D$ em relação à base canônica de $P_5(\mathbb{R})$, obtem-se uma matriz sem linhas nulas.

Q6. Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ o conjuntos das soluções (x_1, x_2, x_3, x_4) do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

(a) $S \subset [(3, 1, -1, 0), (3, 0, -3, 1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 1;

(b) S não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$;

(c) $S \subset [(0, 3, 1, -1), (3, 1, 0, 1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 1;

(d) $S \subset [(3, 1, -1, 0), (3, 0, -3, 1), (0, 3, 1, -1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 2;

(e) $S \subset [(0, 3, 1, -1), (3, 1, 0, 1), (3, 1, -1, 0)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 2.

Resposta (a). Vimos que o conjunto de todas as soluções de um sistema linear homogêneo com n incógnitas sempre é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. A matriz de coeficientes do sistema acima é $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, que, escalonada, resulta em, por exemplo, $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tem 3 linhas não nulas. Isso já nos diz que $\dim S = 4 - 3 = 1$. Só restam as alternativas (a) e (c). As soluções do sistema $AX = 0$ coincidem com as soluções do sistema $RX = 0$ que são, por "retro-substituição", da forma $(6t, t, -4t, t), t \in \mathbb{R}$, ou seja, $S = [(6, 1, -4, 1)]$, que está, obviamente contido em $[(3, 1, -1, 0), (3, 0, -3, 1)]$, mas não em $[(0, 3, 1, -1), (3, 1, 0, 1)]$.

Q7. Considere os subespaços S e W de $P_4(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \{p \in P_4(\mathbb{R}) : p(0) = 0 \text{ e } p'(1) = 0\}, \quad W = [1, x + x^2 - x^3].$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S) = 3$ e $\dim(S \cap W) = 1$;
(b) $\dim(S) = 3$ e $S \cap W = \{0\}$;
(c) $\dim(S) = 2$ e $\dim(S \cap W) = 1$;
(d) $\dim(S) = 2$ e $S \cap W = \{0\}$;
(e) $\dim(S) = 3$ e $W \subset S$.

Resposta (a). Um vetor $p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ de $P_4(\mathbb{R})$ está em S se, e somente se, $\begin{cases} a = 0 \\ b + 2c + 3d + 4e = 0 \end{cases}$, ou seja, se p é da forma $p = (-2c - 3d - 4e)x + cx^2 + dx^3 + ex^4 = c(-2x + x^2) + d(-3x + x^3) + e(-4x + x^4)$. Assim, $S = [-2x + x^2, -3x + x^3, -4x + x^4]$ e, portanto, $\dim S = 3$. Um vetor de W é da forma $q = \alpha + \beta(x + x^2 - x^3)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Esse vetor está em S (e, portanto, em $S \cap W$) se, e somente se, $q(0) = 0$ e $q'(1) = 0$, ou seja, se, e somente se, $\alpha = 0$. Portanto, $S \cap W = [x + x^2 - x^3]$, que tem dimensão 1. Finalmente, W não está contido em S porque, por exemplo, o polinômio constante igual a 1, que é de W, não satisfaz a condição que define os elementos de S.

Q8. Considere a base $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$ definida por:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se (a, b, c, d) denotam as coordenadas da matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ em relação à base $\mathcal{B}$, então $8a + 4b + 2c + d$ é igual a:

(a) 15;
(b) 5;
(c) 3;
(d) 8;
(e) 11.

Resposta (a). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (a, b, c, d)_{\mathcal{B}}$ *se, e somente se,* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + c + d & a + b + c + d \\ a + b + c & a - b + d \end{pmatrix}$, *ou seja, se e somente se,* $\begin{cases} a - b + c + d = 1 \\ a + b + c + d = 2 \\ a + b + c = 3 \\ a - b + d = 0 \end{cases}$.

A solução desse sistema é dada por $a = 3/2, b = 1/2, c = 1, d = -1$.

Q9. Considere os subconjuntos de $P(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}, \quad S_2 = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\},$$
$$S_3 = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(1) = p(0)\}.$$

Dentre esses três conjuntos, são subespaços de $P(\mathbb{R})$:

(a) apenas S_1 e S_3;
(b) S_1, S_2 e S_3;

(c) apenas S_1 e S_2;

(d) apenas S_2 e S_3;

(e) apenas S_3.

Resposta (a). S_1 e S_3 são subespaços porque satisfazem as 3 condições: 1) $0 \in S_1$; 2) se $p, q \in S_1$ então $p + q \in S_1$; 3) se $p \in S_1$ então $\lambda p \in S_1$. Igual para S_3. S_2 não é subespaço vetorial porque, por exemplo, 0 não pertence a S_2 (o polinômio 0 não assume o valor 1 em 0).

Q10. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n e sejam dados vetores dois a dois distintos $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $k > n$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente;

(II) se $k < n$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente;

(III) se $k = n$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Resposta (a). (I) é verdadeira: qualquer família com mais vetores de que a dimensão do espaço é LD. (II) é falsa: por exemplo $\{x, 2x, 3x\}$ é LD em $P_3(\mathbb{R})$. (III) é falsa: por exemplo $\{x, 2x, 3x, 4x\}$ não é base de $P_3(\mathbb{R})$, porque é LD.

Q11. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto C de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}.$$

Temos que C é linearmente dependente se, e somente se:

(a) $a = 3$ ou $a = -1$;

(b) $a = 3$;

(c) $a = -1$;

(d) $a = 0$;

(e) $a = 3$ ou $a = -1$ ou $a = 0$.

Resposta (a). A família é LD se e somente se a equação

$$x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tem soluções não triviais (x, y, z, t). Isso equivale a dizer que o determinante $(4, 4)$ do sistema linear homogêneo associado vale 0, isto é, o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 & a \end{pmatrix}$$

vale 0. *Fazendo a conta esse determinante vale* $(a+1)(3-a)$, *o que vale* 0 *se e somente se* $a=-1$ *ou* $a=3$.

Q12. Seja V um espaço vetorial e sejam $w, u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é linearmente independente e $\{w, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é linearmente dependente, então $w \in [u_1, u_2, \ldots, u_k]$;

(II) se $w \in [u_1, u_2, \ldots, u_k]$, então $[w, u_1, u_2, \ldots, u_k] = [u_1, u_2, \ldots, u_k]$;

(III) se $w \notin [u_1, u_2, \ldots, u_k]$, então $\{w, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Resposta (a).
(I) verdadeira: $\{w, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ *sendo LD, podemos escrever*

$$\lambda w + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \vec{0},$$

com coeficientes não todos nulos. λ *deve ser diferente de* 0 *senão* $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ *é LD porque* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \vec{0}$ *com* λ_i*'s não todos nulos. Logo*

$$w = \sum_{i=1}^{k} (-\frac{\lambda_i}{\lambda}) u_i.$$

(II) verdadeira: é claro que $[u_1, u_2, \ldots, u_k] \subset [w, u_1, u_2, \ldots, u_k]$. *Também se* u *é CL de* $w, u_1, u_2, \ldots, u_k$, *como* w *é CL de* $u_1, u_2, \ldots, u_k$, u *será CL de* $u_1, u_2, \ldots, u_k$. *Isso significa que* $[w, u_1, u_2, \ldots, u_k] \subset [u_1, u_2, \ldots, u_k]$. *Logo os dois conjuntos são iguais.*
(III) falsa: em $P_3(\mathbb{R})$, *tome* $w = 1$, $u_1 = x$, $u_2 = 2x$. *Temos que* $1 \notin [x, 2x]$, *porém* $\{1, x, 2x\}$ *é LD.*

Q13. Seja $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Temos que

$$(x, y, z, w) \in [(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)]$$

se, e somente se:

(a) $2x + z = 0$ e $2x + 3y + w = 0$;
(b) $x = z = 0$ e $3y + w = 0$;
(c) $4x + 3y + z + w = 0$;
(d) $x + 2z = 0$ e $y + w = 0$;
(e) $z = 0$ e $x + y + w = 0$.

Resposta (a). $(x, y, z, w) \in [(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)]$ *se e somente se existem* a, b *tais que* $(x, y, z, w) = a(1, -1, -2, 1) + b(-1, 0, 2, 2)$, *ou seja*

$$\begin{cases} a - b = x, \\ -a = y, \\ -2a + 2b = z, \\ a + 2b = w. \end{cases}$$

Depois de escalonar em b *e* a *isso equivale ao sistema*

$$\begin{cases} -b + a = x, \\ -a = y, \\ 0 = z + 2x, \\ 0 = w + 2x + 3y. \end{cases}$$

A equação do conjunto será o sistema formada das linhas onde não aparecem a *e* b*, no caso, as duas últimas.*

Q14. Considere o espaço vetorial $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ com operações de soma e multiplicação por escalar definidas, respectivamente, por:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1),$$
$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y - \alpha + 1),$$

para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a base $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 3)\}$ de V e o vetor $v \in V$ cujas coordenadas em relação á base $\mathcal{B}$ são $(1, -2)$. Temos que v é igual a:

(a) $(6, -3)$;
(b) $(4, -5)$;
(c) $(1, -2)$;
(d) $(-1, 5)$;
(e) $(-2, 0)$.

Resposta (a): $v = \big(1 \odot (2, 1)\big) \oplus \big((-2) \odot (-1, 3)\big) = (2, 1) \oplus (5, -3) = (6, -3)$.

Q15. Denote por $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seja S o subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = [1, x, e^x, e^{2x}, x + e^x].$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S) = 4$;
(b) $\dim(S) = 5$;
(c) $\dim(S) = 3$;
(d) $\dim(S) = 2$;
(e) S não tem dimensão finita.

Resposta (a): como S *tem família geradora, tem dimensão finita. Como* $x + e^x$ *é CL de* x *e* e^x*, a família* $\{1, x, e^x, e^{2x}\}$ *é geradora de* S*. Vamos mostrar que é LI. Então será base e portanto* S *terá dimensão* 4.

Resolvemos portanto

$$a + bx + ce^x + de^{2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Derivando (1) em relação a x*, temos* $b + ce^x + 2de^{2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *(2).*
Derivando (2) em relação a x *temos* $ce^x + 4de^{2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *(3).*
Dividindo (3) por e^x*,* $c + 4de^x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *(4).*
Derivando (4), temos $4de^x = 0$*, logo* $d = 0$*.*
Colocando $d = 0$ *em (3),* $c = 0$*. A partir de (2) e (1), temos* $a = b = 0$*.*
Conclusão: a única solução de (1) é $a = b = c = d = 0$*, portanto a família* $\{1, x, e^x, e^{2x}\}$ *é LI, logo é base de* S*, e* $\dim S = 4$*.*

Q16. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1, 0, -1, 1, 0), \quad v_2 = (1, 2, 1, 6, 1), \quad v_3 = (1, 0, 1, 2, 3),$$
$$v_4 = (1, -1, 1, 0, 4), \quad v_5 = (1, -2, -3, -4, -1).$$

Uma base para S é:

(a) $\{v_1, v_3, v_4\}$;
(b) $\{v_2, v_3, v_4\}$;
(c) $\{v_1, v_2\}$;
(d) $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$;
(e) $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$.

Resposta (a): escalonando a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

achamos primeiro

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

depois

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e finalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Temos 3 *linhas não nulas, então* S *é de dim* 3 *e a solução é (a) ou (b). Entre essas duas respostas, a certa será a que corresponde a uma família LI, o que se verifica por escalonamento.*

Por exemplo para $\{v_1, v_3, v_4\}$, *escalonando*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

achamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

as três linhas são LI, logo $\{v_1, v_3, v_4\}$ *é LI, logo base de* S, *e a resposta é (a).*

Se tivessemos começado com $\{v_2, v_3, v_4\}$, *escalonando*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

teriamos achado

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

e a família $\{v_2, v_3, v_4\}$ *é LD porque as 2 últimas linhas são proporcionais. Logo a resposta não é (b), portanto deve ser (a).*