Q1. Considere os subespaços S e W de $P_4(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \big\{p \in P_4(\mathbb{R}) : p(0) = 0 \text{ e } p'(1) = 0\big\}, \quad W = [1, x + x^2 - x^3].$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S) = 3$ e $\dim(S \cap W) = 1$;
(b) $\dim(S) = 2$ e $\dim(S \cap W) = 1$;
(c) $\dim(S) = 3$ e $W \subset S$;
(d) $\dim(S) = 2$ e $S \cap W = \{0\}$;
(e) $\dim(S) = 3$ e $S \cap W = \{0\}$.

Q2. Seja V um espaço vetorial e sejam $w, u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é linearmente independente e $\{w, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é linearmente dependente, então $w \in [u_1, u_2, \ldots, u_k]$;
(II) se $w \in [u_1, u_2, \ldots, u_k]$, então $[w, u_1, u_2, \ldots, u_k] = [u_1, u_2, \ldots, u_k]$;
(III) se $w \notin [u_1, u_2, \ldots, u_k]$, então $\{w, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q3. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(b) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(c) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(d) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(e) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

Q4. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$S_1 = [(1,0,-1,0),(1,2,1,2)], \quad S_2 = [(0,1,1,1),(1,0,0,1)].$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(b) $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
(c) $\dim(S_1 + S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
(d) $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
(e) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

Q5. Considere o subconjunto C de $P_5(\mathbb{R})$ definido por:

$$C = \{1+x, 1+x+x^2+x^4, x+x^2+x^3+x^4\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a um conjunto D tal que $C \cup D$ seja uma base de $P_5(\mathbb{R})$:

(a) $D = \{1, 1+x+x^3+x^4, x^5\}$;
(b) $D = \{1, 1+x+x^2, 1-x^3-x^4\}$;
(c) $D = \{0, 1, x-x^3+x^5\}$;
(d) $D = \{1+x^2, 1-x^5\}$;
(e) $D = \{1, x+x^3, x^3-x^4-x^5\}$.

Q6. Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ o conjuntos das soluções (x_1,x_2,x_3,x_4) do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

(a) $S \subset [(3,1,-1,0),(3,0,-3,1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 1;
(b) $S \subset [(3,1,-1,0),(3,0,-3,1),(0,3,1,-1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 2;
(c) $S \subset [(0,3,1,-1),(3,1,0,1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 1;
(d) S não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$;
(e) $S \subset [(0,3,1,-1),(3,1,0,1),(3,1,-1,0)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 2.

Q7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n e sejam dados vetores dois a dois distintos $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $k > n$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente;

(II) se $k < n$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente;

(III) se $k = n$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q8. Considere a base $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$ definida por:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se (a, b, c, d) denotam as coordenadas da matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ em relação à base $\mathcal{B}$, então $8a + 4b + 2c + d$ é igual a:

(a) 3;
(b) 11;
(c) 5;
(d) 8;
(e) 15.

Q9. Considere os subconjuntos de $P(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \big\{p \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\big\}, \quad S_2 = \big\{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\big\},$$
$$S_3 = \big\{p \in P(\mathbb{R}) : p(1) = p(0)\big\}.$$

Dentre esses três conjuntos, são subespaços de $P(\mathbb{R})$:

(a) apenas S_1 e S_3;
(b) S_1, S_2 e S_3;
(c) apenas S_3;
(d) apenas S_2 e S_3;
(e) apenas S_1 e S_2.

Q10. Sejam S_1 e S_2 subespaços de $P_8(\mathbb{R})$ tais que $P_8(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2) + 1$. Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 5$;
(b) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 7$;
(c) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 4$;
(d) a soma $S_1 + S_2$ não é direta;
(e) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 6$.

Q11. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1,0,-1,1,0), \quad v_2 = (1,2,1,6,1), \quad v_3 = (1,0,1,2,3),$$
$$v_4 = (1,-1,1,0,4), \quad v_5 = (1,-2,-3,-4,-1).$$

Uma base para S é:

(a) $\{v_2, v_3, v_4\}$;
(b) $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$;
(c) $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$;
(d) $\{v_1, v_2\}$;
(e) $\{v_1, v_3, v_4\}$.

Q12. Denote por $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seja S o subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = [1, x, e^x, e^{2x}, x + e^x].$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(S) = 4$;
(b) S não tem dimensão finita;
(c) $\dim(S) = 3$;
(d) $\dim(S) = 5$;
(e) $\dim(S) = 2$.

Q13. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto C de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}.$$

Temos que C é linearmente dependente se, e somente se:

(a) $a = 0$;
(b) $a = -1$;
(c) $a = 3$;
(d) $a = 3$ ou $a = -1$ ou $a = 0$;
(e) $a = 3$ ou $a = -1$.

Q14. Seja $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Temos que

$$(x, y, z, w) \in [(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)]$$

se, e somente se:

(a) $4x + 3y + z + w = 0$;
(b) $x + 2z = 0$ e $y + w = 0$;
(c) $z = 0$ e $x + y + w = 0$;
(d) $x = z = 0$ e $3y + w = 0$;
(e) $2x + z = 0$ e $2x + 3y + w = 0$.

Q15. Considere o espaço vetorial $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ com operações de soma e multiplicação por escalar definidas, respectivamente, por:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1),$$
$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y - \alpha + 1),$$

para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a base $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 3)\}$ de V e o vetor $v \in V$ cujas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ são $(1, -2)$. Temos que v é igual a:

(a) $(-1, 5)$;
(b) $(4, -5)$;
(c) $(1, -2)$;
(d) $(6, -3)$;
(e) $(-2, 0)$.

Q16. Sejam V um espaço vetorial, S_1 e S_2 subespaços de V, $\mathcal{B}_1$ uma base de S_1 e $\mathcal{B}_2$ uma base de S_2. Considere as seguintes afirmações:

(I) existe uma base para $S_1 \cap S_2$ contida em $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$;

(II) se a interseção $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é vazia e a união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 + S_2$, então $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;

(III) se $V = S_1 + S_2$, então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é um conjunto gerador de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.