

Q1. Denote por $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e seja S o subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = [1, x, e^x, e^{2x}, x + e^x].$$

Pode-se afirmar que:

- (a) $\dim(S) = 5$;
- (b) S não tem dimensão finita;
- (c) $\dim(S) = 2$;
- (d) $\dim(S) = 3$;
- (e) $\dim(S) = 4$.

Q2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n e sejam dados vetores dois a dois distintos $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $k > n$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente dependente;
- (II) se $k < n$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente independente;
- (III) se $k = n$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é uma base de V .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q3. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, -1, 1, 0), & v_2 &= (1, 2, 1, 6, 1), & v_3 &= (1, 0, 1, 2, 3), \\ v_4 &= (1, -1, 1, 0, 4), & v_5 &= (1, -2, -3, -4, -1). \end{aligned}$$

Uma base para S é:

- (a) $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$;
- (b) $\{v_2, v_3, v_4\}$;
- (c) $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$;
- (d) $\{v_1, v_2\}$;
- (e) $\{v_1, v_3, v_4\}$.

Q4. Considere o subconjunto C de $P_5(\mathbb{R})$ definido por:

$$C = \{1 + x, 1 + x + x^2 + x^4, x + x^2 + x^3 + x^4\}.$$

Assinale a alternativa correspondente a um conjunto D tal que $C \cup D$ seja uma base de $P_5(\mathbb{R})$:

- (a) $D = \{1, 1 + x + x^2, 1 - x^3 - x^4\}$;
- (b) $D = \{0, 1, x - x^3 + x^5\}$;
- (c) $D = \{1, x + x^3, x^3 - x^4 - x^5\}$;
- (d) $D = \{1, 1 + x + x^3 + x^4, x^5\}$;
- (e) $D = \{1 + x^2, 1 - x^5\}$.

Q5. Sejam V um espaço vetorial, S_1 e S_2 subespaços de V , $\mathcal{B}_1$ uma base de S_1 e $\mathcal{B}_2$ uma base de S_2 . Considere as seguintes afirmações:

- (I) existe uma base para $S_1 \cap S_2$ contida em $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$;
- (II) se a interseção $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é vazia e a união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $S_1 + S_2$, então $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
- (III) se $V = S_1 + S_2$, então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é um conjunto gerador de V .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q6. Considere os subconjuntos de $P(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}, \quad S_2 = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\}, \\ S_3 = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(1) = p(0)\}.$$

Dentre esses três conjuntos, são subespaços de $P(\mathbb{R})$:

- (a) apenas S_2 e S_3 ;
- (b) apenas S_3 ;
- (c) apenas S_1 e S_2 ;
- (d) apenas S_1 e S_3 ;
- (e) S_1 , S_2 e S_3 .

Q7. Considere os subespaços S e W de $P_4(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \{p \in P_4(\mathbb{R}) : p(0) = 0 \text{ e } p'(1) = 0\}, \quad W = [1, x + x^2 - x^3].$$

Pode-se afirmar que:

- (a) $\dim(S) = 3$ e $S \cap W = \{0\}$;
- (b) $\dim(S) = 3$ e $W \subset S$;
- (c) $\dim(S) = 2$ e $S \cap W = \{0\}$;
- (d) $\dim(S) = 3$ e $\dim(S \cap W) = 1$;
- (e) $\dim(S) = 2$ e $\dim(S \cap W) = 1$.

Q8. Seja V um espaço vetorial e sejam $w, u_1, u_2, \dots, u_k \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é linearmente independente e $\{w, u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é linearmente dependente, então $w \in [u_1, u_2, \dots, u_k]$;
- (II) se $w \in [u_1, u_2, \dots, u_k]$, então $[w, u_1, u_2, \dots, u_k] = [u_1, u_2, \dots, u_k]$;
- (III) se $w \notin [u_1, u_2, \dots, u_k]$, então $\{w, u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q9. Sejam S_1 e S_2 subespaços de $P_8(\mathbb{R})$ tais que $P_8(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2) + 1$. Pode-se afirmar que:

- (a) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 4$;
- (b) a soma $S_1 + S_2$ não é direta;
- (c) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 6$;
- (d) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 5$;
- (e) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 7$.

Q10. Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ o conjunto das soluções (x_1, x_2, x_3, x_4) do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

- (a) $S \subset [(0, 3, 1, -1), (3, 1, 0, 1), (3, 1, -1, 0)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 2;
- (b) $S \subset [(3, 1, -1, 0), (3, 0, -3, 1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 1;
- (c) S não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$;
- (d) $S \subset [(3, 1, -1, 0), (3, 0, -3, 1), (0, 3, 1, -1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 2;
- (e) $S \subset [(0, 3, 1, -1), (3, 1, 0, 1)]$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão igual a 1.

Q11. Considere o espaço vetorial $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ com operações de soma e multiplicação por escalar definidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1), \\ \alpha \odot (x, y) &= (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y - \alpha + 1), \end{aligned}$$

para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a base $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 3)\}$ de V e o vetor $v \in V$ cujas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ são $(1, -2)$. Temos que v é igual a:

- (a) $(-2, 0)$;
- (b) $(1, -2)$;
- (c) $(4, -5)$;
- (d) $(6, -3)$;
- (e) $(-1, 5)$.

Q12. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto C de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}.$$

Temos que C é linearmente dependente se, e somente se:

- (a) $a = 3$ ou $a = -1$;
- (b) $a = 0$;
- (c) $a = 3$ ou $a = -1$ ou $a = 0$;
- (d) $a = 3$;
- (e) $a = -1$.

Q13. Considere a base $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$ definida por:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se (a, b, c, d) denotam as coordenadas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ em relação à base $\mathcal{B}$, então $8a + 4b + 2c + d$ é igual a:

- (a) 5;
- (b) 3;
- (c) 8;
- (d) 11;
- (e) 15.

Q14. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
- (b) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
- (c) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
- (d) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
- (e) $\dim(S_1) = 3$, $\dim(S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

Q15. Considere os subespaços S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$S_1 = [(1, 0, -1, 0), (1, 2, 1, 2)], \quad S_2 = [(0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)].$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$;
- (b) $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
- (c) $\dim(S_1 + S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$;
- (d) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$;
- (e) $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

Q16. Seja $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Temos que

$$(x, y, z, w) \in [(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)]$$

se, e somente se:

- (a) $x + 2z = 0$ e $y + w = 0$;
- (b) $4x + 3y + z + w = 0$;
- (c) $z = 0$ e $x + y + w = 0$;
- (d) $2x + z = 0$ e $2x + 3y + w = 0$;
- (e) $x = z = 0$ e $3y + w = 0$.