

MAT2457 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA I
Gabarito da 2ª Prova - 1º semestre de 2015

Nesta prova considera-se fixada uma orientação do espaço e um sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{O}, \mathcal{E})$ em $\mathbb{E}^3$, em que $\mathcal{E}$ é uma base ortonormal positiva de V^3 . A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e planos e coordenadas de pontos estão escritas no sistema Σ e coordenadas de vetores estão escritas na base $\mathcal{E}$.

Nesta versão da prova, a alternativa correta de cada questão está na letra (a).

Questão 1. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$. Se $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é igual a:

- (a) $3\sqrt{3}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) $\sqrt{6}$; (d) $2\sqrt{3}$; (e) $\sqrt{5}$.

Solução: Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)^2} = 3 \cdot 2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} = 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Questão 2. Considere os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 1)$, $C = (2, 1, 2)$ e $D = (1, 2, 2)$, e seja h a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à base ABC . Pode-se afirmar que:

- (a) $1 \leq h < 3/2$; (b) $\frac{3}{2} \leq h < 2$; (c) $2 \leq h$; (d) $h < \frac{1}{2}$; (e) $\frac{1}{2} \leq h < 1$.

Solução: Uma equação geral do plano π que contém os pontos A , B e C é $\det(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$,

$$\text{logo } \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Se desenvolver o determinante, obtemos } \pi : x - y - z + 1 = 0.$$

Portanto, $h = \text{dist}(D, \pi) = \frac{|1-2-2+1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \frac{2}{1.7} \approx 1,1$. □

Questão 3. Considere o ponto $A = (1, 1, 0)$ e as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad s : 2x = y + 1 = \frac{3z}{2}, \quad t : \begin{cases} x = -3 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Denote por π o plano que contém o ponto A e é paralelo às retas r e s . Seja $B = (a, b, c)$ o ponto onde a reta t corta o plano π . Temos que $a + b + c$ é igual a:

- (a) 4; (b) -2; (c) -6; (d) 1; (e) -9.

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{u} = (1, -1, 1)$. Por outro lado, $s : \frac{x}{1/2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2/3}$, logo um vetor diretor de s é $(1/2, 1, 2/3) = (1/6)(3, 6, 4) = (1/6)\vec{v}$. Uma equação geral de π é $[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$, isto é

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0. \text{ Assim } \pi : 2x - 7y + 9z + 5 = 0. \text{ O ponto } P_\mu = (-3 + \mu, 1 + \mu, \mu) \text{ de } t \text{ está em}$$

π se suas coordenadas satisfazem a equação geral do plano, $0 = 2(-3 + \mu) - 7(1 + \mu) + 9\mu + 5 = 4\mu - 8$ logo $\mu = 2$. Portanto $B = P_\mu = (-1, 3, 2)$. □

Questão 4. Considere os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $P = (1, -1, 1)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Denote por Q o ponto de r com segunda coordenada positiva tal que a distância entre P e Q seja igual a 3. Temos que a área do triângulo ABQ é igual a:

$$(a) \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad (b) \frac{\sqrt{6}}{4}; \quad (c) \sqrt{6}; \quad (d) 2\sqrt{6}; \quad (e) 4\sqrt{6}.$$

Solução: Temos que r esta formado por todos os pontos $P_y = (y+2, y, 0)$ com $y \in \mathbb{R}$. Precisamos determinar o valor de y positivo tal que $\text{dist}(P_y, P) = 3$. Assim $9 = \|\overrightarrow{PP_y}\|^2 = \|(y+1, y+1, -1)\|^2 = 2(y+1)^2 + 1$, isto é $0 = (y+1)^2 - 4 = y^2 + 2y - 3 = (y-1)(y+3)$. Portanto, $y = 1$ e $Q = P_1 = (3, 1, 0)$. Finalmente, a área do triângulo ABQ é

$$\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AQ}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \|(-1, 2, -1)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Questão 5. Considere o ponto $A = (-2, 3, 0)$ e o plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu, \\ y = 1 + 2\lambda - \mu, \\ z = -2 + \mu, \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}.)$$

A distância entre A e π é igual a:

$$(a) \sqrt{14}; \quad (b) 0; \quad (c) \sqrt{2}; \quad (d) \sqrt{3}; \quad (e) \frac{47}{\sqrt{14}}.$$

Solução: Um vetor normal ao plano π é o produto vetorial dos 2 vetores diretores do plano determinados por suas equações paramétricas, isto é $\vec{n} = (1, 2, 0) \wedge (1, -1, 1) = (2, -1, -3)$. Por outro lado, atribuindo a λ e μ o valor 0, nas equações paramétricas do plano, obtemos o ponto $B = (1, 1, -2) \in \pi$. Portanto,

$$\text{dist}(A, \pi) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(2, -1, -3) \cdot (3, -2, -2)|}{\sqrt{14}} = \frac{|6 + 2 + 6|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

Questão 6. Considere os pontos $A = (1, -2, 2)$, $B = (-3, 1, -2)$ e o plano $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$. Seja π_1 o plano que contém os pontos A e B e é normal ao plano π . A distância da origem O ao plano π_1 é igual a:

$$(a) \frac{\sqrt{5}}{7}; \quad (b) 5; \quad (c) \frac{1}{49}; \quad (d) \frac{5}{21}; \quad (e) 10.$$

Solução: Dois vetores diretores do plano π_1 são o vetor $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{n} = (2, 1, -1)$, o vetor coeficiente do plano π . Portanto, uma equação geral do plano π_1 é $[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \vec{n}] = 0$, isto é

$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Se desenvolver o determinante, a equação do plano fica na forma $\pi_1 : x - 12y - 10z - 5 = 0$. Consequentemente,

$$\text{dist}(0, \pi_1) = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + (-12)^2 + (-10)^2}} = \frac{5}{\sqrt{245}} = \frac{5}{7\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{7}.$$

Questão 7. Considere os pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (-1, 0, -1)$ e $C = (2, 1, 2)$. A altura do triângulo ABC relativa à base BC é igual a:

(a) $2\sqrt{\frac{22}{19}}$; (b) $\sqrt{\frac{22}{19}}$; (c) $2\frac{\sqrt{22}}{19}$; (d) $\frac{\sqrt{22}}{19}$; (e) $\sqrt{\frac{19}{22}}$.

Solução: A altura h , satisfaz a seguinte relação,

$$h = \frac{\|\vec{BA} \wedge \vec{BC}\|}{\|\vec{BC}\|} = \frac{\|(2, 2, 0) \wedge (3, 1, 3)\|}{\|(3, 1, 3)\|} = \frac{\|2(3, -3, -2)\|}{\sqrt{19}} = 2\sqrt{\frac{22}{19}}.$$

Questão 8. Sejam $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bases de V^3 tais que:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1. \end{cases}$$

Se $\vec{v} = (3, 5, 7)_{\mathcal{B}}$ e se (x, y, z) denotam as coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base $\mathcal{C}$, então $x + y + z$ é igual a:

(a) 10; (b) 3; (c) 7; (d) 1; (e) 9.

Solução: Se $\vec{v} = (x, y, z)_{\mathcal{C}}$, então $x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3 = \vec{v}$, logo

$$x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) + z(1, 0, 0) = (3, 5, 7).$$

Igualando coordenada a coordenada, obtemos o sistema linear $\begin{cases} x + z = 3 \\ x + y = 5 \\ y = 7 \end{cases}$ com solução única $x = -2, y = 7, z = 5$. Portanto, $\vec{v} = (-2, 7, 5)_{\mathcal{C}}$. □

Questão 9. Considere as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - 2\lambda, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad e \quad s: \begin{cases} x + y - z - 3 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

A distância entre r e s é igual a:

(a) $\sqrt{\frac{5}{6}}$; (b) $\frac{6}{7}$; (c) $\frac{7}{6}$; (d) $\sqrt{\frac{6}{5}}$; (e) $\frac{\sqrt{5}}{12}$.

Solução: Um vetor diretor da reta r é $\vec{u} = (1, -2, -1)$.

A reta s é dada como interseção de dois planos com vetores normais $(1, 1, -1)$ e $(1, -1, 3)$, respectivamente. Assim, um vetor diretor de s é $\vec{v} = (1, 1, -1) \wedge (1, -1, 3) = (2, -4, -2)$. Observamos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos pois $\vec{v} = 2\vec{u}$. Isso implica que as retas r e s são paralelas. Logo a distância entre r e s é a mesma que a distância entre um ponto qualquer A de r e s .

Seja $A = (1, 2, 1)$, um ponto de r . Se resolvemos o sistema que define s , para $z = 0$, obtemos o ponto $B = (1, 2, 0)$ de s . Assim, $\overrightarrow{BA} = (0, 0, 1)$.

Aplicando a fórmula de distância entre ponto e reta obtemos:

$$d(r, s) = d(A, s) = \frac{\|\overrightarrow{BA} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(0, 0, 1) \wedge (2, -4, -2)\|}{\|(2, -4, -2)\|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

Questão 10. Considere a reta:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que π contém r . Pode-se afirmar que:

- (a) $3b + c + d = 0$; (b) $4b + c + d = 0$; (c) $5b + c + d = 0$;
(d) $6b + c + d = 0$; (e) $7b + c + d = 0$.

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e um vetor normal ao plano π é seu vetor coeficiente $\vec{n} = (a, b, c)$. Como r está contida em π , segue que $\vec{v}$ é ortogonal ao vetor normal ao plano π . Logo $0 = \vec{v} \cdot \vec{n} = a - b$, ou equivalentemente

$$a = b.$$

Por outro lado, como r está contida em π , o ponto $A = (1, 2, 1)$ de r pertence ao plano π . Assim $(1, 2, 1)$ é uma solução da equação $ax + by + cz + d = 0$. Desta forma obtemos

$$a + 2b + c + d = 0.$$

Combinando as duas equações, obtemos a relação $3b + c + d = 0$. □

Questão 11. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere os vetores $\vec{e}_1 = (1, \alpha, -1)$, $\vec{e}_2 = (\alpha, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (1, 1, 1)$. Assinale a alternativa correspondente ao conjunto dos valores de α que faz de $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base positiva de V^3 :

- (a) vazio; (b) $[-2, 2]$; (c) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$; (d) $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$; (e) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Solução: Os vetores da base $\mathcal{B}$ estão expressos em termos da base positiva $\mathcal{E}$. Logo $\mathcal{B}$ é uma base positiva se, e somente se, a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{B}$ tiver determinante positivo. Agora, $\det M = -(\alpha^2 + 1)$, que é negativo para todos os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Questão 12. Sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}, \vec{z}_1, \vec{z}_2 \in V^3$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 5$, então $[\vec{v}, \vec{w} + 2\vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] = 5$;

(II) se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1] = 2$ e $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_2] = 3$, então $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1 + 3\vec{z}_2] = 11$;

(III) $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}]$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Solução: Usamos as propriedades do produto misto.

(I)

$$\begin{aligned} [\vec{v}, \vec{w} + 2\vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} - 3\vec{v}] + [\vec{v}, 2\vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] + [\vec{v}, \vec{w}, -3\vec{v}] + [\vec{v}, 2\vec{z}, \vec{z}] + [\vec{v}, 2\vec{z}, -3\vec{v}] \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] - 3[\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}] + 2[\vec{v}, \vec{z}, \vec{z}] - 6[\vec{v}, \vec{z}, \vec{v}] \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] \\ &= 5, \end{aligned}$$

onde usamos que se houver dois vetores repetidos, o produto misto é zero, i.e. $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}] = 0$, $[\vec{v}, \vec{z}, \vec{z}] = 0$ e $[\vec{v}, \vec{z}, \vec{v}] = 0$.

(II)

$$\begin{aligned} [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1 + 3\vec{z}_2] &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1] + [\vec{v}, \vec{w}, 3\vec{z}_2] \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1] + 3[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_2] \\ &= 2 + 9 = 11. \end{aligned}$$

(III) $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{z}] = [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}]$.

Questão 13. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e seja $\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w}$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes, então $[\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$;
- (II) se $\beta \in \mathbb{R}$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, -1, \beta)$, então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{z}$ é um múltiplo escalar do vetor $(1, 1, \gamma)$;
- (III) se $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = \frac{1}{2}$ e a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $\frac{\pi}{4}$ radianos, então $\|(3\vec{v}) \wedge (4\vec{w})\| = 6\sqrt{2}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

Solução: (I) Temos que $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}] = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2 > 0$. Usando agora as propriedades algébricas do produto misto, obtemos $[\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{z}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] > 0$.

(II) É falsa em geral pois $\vec{v} \wedge \vec{w} = (\beta - 1, -\beta - 1, 2)$ não é um múltiplo escalar de $(1, 1, \gamma)$ se $\beta \neq 0$.

(III) Pelas propriedades do produto vetorial, $(3\vec{v}) \wedge (4\vec{w}) = 12(\vec{v} \wedge \vec{w})$. Logo $\|(3\vec{v}) \wedge (4\vec{w})\| = 12\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = 12\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\sin(\frac{\pi}{4}) = 6\sqrt{2}$. $\square$

Questão 14. Considere as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 1 + 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad s : \begin{cases} x - y - z = 0, \\ 5x + y - z - 4 = 0, \end{cases} \quad t : \frac{x}{2} = \frac{2-y}{4} = \frac{z+2}{6}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $r = s = t$; (b) $r = s \neq t$; (c) $r = t \neq s$; (d) $s = t \neq r$; (e) $r \neq s, r \neq t$ e $s \neq t$.

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{u} = (1, -2, 3)$.

Um vetor diretor de s é $\vec{v} = (1, -1, -1) \wedge (5, 1, -1) = (2, -4, 6)$ que é paralelo a $\vec{u}$. Logo r e s são paralelas.

Para obter um vetor diretor de t , encontramos a forma simétrica de t :

$$t : \frac{x}{2} = \frac{2-y}{4} = \frac{z+2}{6} \Leftrightarrow t : \frac{x-0}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-(-2)}{6}.$$

E obtemos que um vetor diretor de t é $\vec{w} = (2, -4, 6)$ que, de novo, é paralelo a $\vec{u}$.

Para ver se r e s são iguais, é suficiente comprovar se um ponto qualquer de r pertence a s . O ponto $P = (1, 0, 1)$ pertence a r . Vejamos que as coordenadas do ponto satisfazem as duas equações que definem s : $1 - 0 - 1 = 0$ e $5 \cdot 1 + 0 - 1 - 4 = 0$. Logo P pertence também a s . Isso implica que $r = s$.

Vejamos se P pertence a t . Para isso: $\frac{1}{2} = \frac{2-0}{4} = \frac{1+2}{6}$. Logo P também pertence a t . Assim $r = s = t$.

Questão 15. Considere o ponto $A = (0, 2, -2)$ e a reta:

$$r : X = (1, 5, 1) + \lambda(-1, 3, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seja P o ponto de r mais próximo de A . Se $P = (a, b, c)$, então $a + b + c$ é igual a:

- (a) 3; (b) 7; (c) -7; (d) 14; (e) -2.

Solução: Os pontos da reta r são da forma $P_\lambda = (1 - \lambda, 5 + 3\lambda, 1 + 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

O vetor $\overrightarrow{P_\lambda A} = (-1 + \lambda, -3 - 3\lambda, -3 - 2\lambda)$. O ponto da reta procurado é obtido para o valor de λ tal que $\overrightarrow{P_\lambda A}$ é ortogonal ao vetor diretor $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ da reta r . Assim,

$$0 = \overrightarrow{P_\lambda A} \cdot \vec{v} = -14 - 14\lambda.$$

Logo $\lambda = -1$, e $P = P_{-1} = (2, 2, -1)$. □

Questão 16. Considere as retas:

$$r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, -2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$s : X = (1, -1, 0) + \mu(1, 1, 1), \quad \mu \in \mathbb{R};$$

$$t : \begin{cases} z = 2, \\ x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) r e s são reversas, s e t são concorrentes;
- (b) r e s são concorrentes, s e t são concorrentes;
- (c) r e s são reversas, s e t são reversas;
- (d) r e s são concorrentes, s e t são reversas;
- (e) $r = s = t$.

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{u} = (1, -2, 1)$, e um vetor diretor de s é $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, obtemos que r e s não são paralelas. Portanto, r e s são reversas ou concorrentes. Consideremos os pontos $A = (1, 0, 1)$ de r e $B = (1, -1, 0)$ de s , e o vetor $\overrightarrow{AB} = (0, -1, -1)$. Pelo visto nas aulas sabemos que r e s são reversas se a sequência de vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é l.i. e são concorrentes se a sequência de vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é l.d.. Como

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}] = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

temos que $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é l.i., e as retas r e s são reversas.

Um vetor diretor de t é $\vec{w} = (0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0) = (-1, 1, 0)$. O vetor $\vec{w}$ não é paralelo ao vetor $\vec{v}$, logo s e t são reversas ou concorrentes. O ponto $B = (1, -1, 0)$ pertence a s e o ponto $C = (2, 2, 2)$ pertence a t . Consideremos o vetor $\overrightarrow{BC} = (1, 3, 2)$. Como

$$[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{BC}] = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

temos que $(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{BC})$ é l.d. e, portanto, s e t são concorrentes. □