

Nesta prova considera-se fixada uma orientação do espaço e um sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{O}, \mathcal{E})$ em $\mathbb{E}^3$, em que $\mathcal{E}$ é uma base ortonormal positiva de V^3 . A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e planos e coordenadas de pontos estão escritas no sistema Σ e coordenadas de vetores estão escritas na base $\mathcal{E}$.

Q1. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e seja $\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w}$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes, então $[\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$;
- (II) se $\beta \in \mathbb{R}$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, -1, \beta)$, então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{z}$ é um múltiplo escalar do vetor $(1, 1, \gamma)$;
- (III) se $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = \frac{1}{2}$ e a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $\frac{\pi}{4}$ radianos, então $\|(3\vec{v}) \wedge (4\vec{w})\| = 6\sqrt{2}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (c) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q2. Sejam $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bases de V^3 tais que:

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1.$$

Se $\vec{v} = (3, 5, 7)_{\mathcal{B}}$ e se (x, y, z) denotam as coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base $\mathcal{C}$, então $x + y + z$ é igual a:

- (a) 10;
- (b) 3;
- (c) 7;
- (d) 1;
- (e) 9.

Q3. Sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}, \vec{z}_1, \vec{z}_2 \in V^3$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 5$, então $[\vec{v}, \vec{w} + 2\vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] = 5$;
- (II) se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1] = 2$ e $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_2] = 3$, então $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}_1 + 3\vec{z}_2] = 11$;
- (III) $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}]$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q4. Considere o ponto $A = (0, 2, -2)$ e a reta:

$$r : X = (1, 5, 1) + \lambda(-1, 3, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seja P o ponto de r mais próximo de A . Se $P = (a, b, c)$, então $a + b + c$ é igual a:

- (a) -2 ;
- (b) 3 ;
- (c) 7 ;
- (d) -7 ;
- (e) 14 .

Q5. Considere as retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 1 + 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s : \begin{cases} x - y - z = 0, \\ 5x + y - z - 4 = 0; \end{cases}$$

$$t : \frac{x}{2} = \frac{2 - y}{4} = \frac{z + 2}{6}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $r \neq s$, $r \neq t$ e $s \neq t$;
- (b) $r = t \neq s$;
- (c) $s = t \neq r$;
- (d) $r = s \neq t$;
- (e) $r = s = t$.

Q6. Considere os pontos:

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (2, 2, 1), \quad C = (2, 1, 2), \quad D = (1, 2, 2)$$

e seja h a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à base ABC . Pode-se afirmar que:

- (a) $h < \frac{1}{2}$;
- (b) $\frac{1}{2} \leq h < 1$;
- (c) $h \geq 2$;
- (d) $1 \leq h < \frac{3}{2}$;
- (e) $\frac{3}{2} \leq h < 2$.

Q7. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$. Se $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é igual a:

- (a) $3\sqrt{3}$;
- (b) $\sqrt{3}$;
- (c) $\sqrt{5}$;
- (d) $\sqrt{6}$;
- (e) $2\sqrt{3}$.

Q8. Considere os pontos $A = (1, -2, 2)$, $B = (-3, 1, -2)$ e o plano:

$$\pi : 2x + y - z + 3 = 0.$$

Seja π_1 o plano que contém os pontos A e B e é normal ao plano π . A distância da origem O ao plano π_1 é igual a:

- (a) 5;
- (b) $\frac{5}{21}$;
- (c) $\frac{\sqrt{5}}{7}$;
- (d) 10;
- (e) $\frac{1}{49}$.

Q9. Considere o ponto $A = (1, 1, 0)$ e as retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s : 2x = y + 1 = \frac{3z}{2}; \quad t : \begin{cases} x = -3 + \mu, \\ y = 1 + \mu, \\ z = \mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Denote por π o plano que contém o ponto A e é paralelo às retas r e s . Seja $B = (a, b, c)$ o ponto onde a reta t corta o plano π . Temos que $a + b + c$ é igual a:

- (a) 1;
- (b) -6;
- (c) -9;
- (d) -2;
- (e) 4.

Q10. Considere os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $P = (1, -1, 1)$ e a reta:

$$r : \begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Denote por Q o ponto de r com segunda coordenada positiva tal que a distância entre P e Q seja igual a 3. Temos que a área do triângulo ABQ é igual a:

- (a) $2\sqrt{6}$;
- (b) $4\sqrt{6}$;
- (c) $\sqrt{6}$;
- (d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$;
- (e) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Q11. Considere o ponto $A = (-2, 3, 0)$ e o plano:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu, \\ y = 1 + 2\lambda - \mu, \\ z = -2 + \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

A distância entre A e π é igual a:

- (a) $\sqrt{14}$;
- (b) $\sqrt{2}$;
- (c) 0;
- (d) $\frac{47}{\sqrt{14}}$;
- (e) $\sqrt{3}$.

Q12. Considere os pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (-1, 0, -1)$ e $C = (2, 1, 2)$. A altura do triângulo ABC relativa à base BC é igual a:

- (a) $\sqrt{\frac{19}{22}}$;
- (b) $\frac{\sqrt{22}}{19}$;
- (c) $2\frac{\sqrt{22}}{19}$;
- (d) $2\sqrt{\frac{22}{19}}$;
- (e) $\sqrt{\frac{22}{19}}$.

Q13. Considere a reta:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que π contém r . Pode-se afirmar que:

- (a) $4b + c + d = 0$;
- (b) $7b + c + d = 0$;
- (c) $5b + c + d = 0$;
- (d) $3b + c + d = 0$;
- (e) $6b + c + d = 0$.

Q14. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere os vetores:

$$\vec{e}_1 = (1, \alpha, -1), \quad \vec{e}_2 = (\alpha, 0, 1), \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 1).$$

Assinale a alternativa correspondente ao conjunto dos valores de α que faz de $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base positiva de V^3 :

- (a) $] -\infty, -\frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}, +\infty[$;
- (b) vazio;
- (c) $[-2, 2]$;
- (d) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;
- (e) $] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty[$.

Q15. Considere as retas:

$$r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, -2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$s : X = (1, -1, 0) + \mu(1, 1, 1), \quad \mu \in \mathbb{R};$$

$$t : \begin{cases} z = 2, \\ x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) r e s são concorrentes, s e t são concorrentes;
- (b) r e s são reversas, s e t são reversas;
- (c) r e s são reversas, s e t são concorrentes;
- (d) $r = s = t$;
- (e) r e s são concorrentes, s e t são reversas.

Q16. Considere as retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - 2\lambda, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s : \begin{cases} x + y - z - 3 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

A distância entre r e s é igual a:

- (a) $\frac{\sqrt{5}}{12}$;
- (b) $\sqrt{\frac{5}{6}}$;
- (c) $\frac{7}{6}$;
- (d) $\sqrt{\frac{6}{5}}$;
- (e) $\frac{6}{7}$.