Q1. Seja A uma matriz real 3×3 tal que $\det(A) = 7$. Temos que:

$$\alpha = \left(\det(A^3) + \det(3A)\right)\det(A^{-1})$$

é igual a:

(a) nenhuma das outras alternativas é correta;
(b) 76;
(c) 3724;
(d) $\frac{534}{7}$;
(e) 52.

Q2. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w} = \text{proj}_{\alpha\vec{v}}\,\vec{w}$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ com $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$;

(II) $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}_1 + \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}_2$, para quaisquer $\vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V^3$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$;

(III) $\text{proj}_{\vec{v}}(\alpha\vec{w}) = \alpha\,\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

① $\det(A^3) = [\det(A)]^3 = 7^3$
$\det(3A) = 3^3 \det(A) = 3^3\, 7$
$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{7}$

$\Rightarrow \alpha = (7^3 + 3^3\, 7)\cdot\frac{1}{7} = 7^2 + 3^3 =$
$= 49 + 27 = \boxed{76}$

② • $pr_{(\alpha\vec{v})}\vec{w} = \left(\frac{(\alpha\vec{v})\cdot\vec{w}}{\|\alpha\vec{v}\|^2}\right)(\alpha\vec{v}) = \left(\frac{\alpha^2(\vec{v}\cdot\vec{w})}{\alpha^2\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = pr_{\vec{v}}\,\vec{w}$ $\therefore$ (I) é V.

• $pr_{\vec{v}}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \left(\frac{\vec{v}\cdot(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)}{\|\vec{v}\|^2}\right)\cdot\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_1}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} + \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_2}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} =$
$= pr_{\vec{v}}\,\vec{w}_1 + pr_{\vec{v}}\,\vec{w}_2$; $\therefore$ (II) é V.

• $pr_{\vec{v}}(\alpha\vec{w}) = \left(\frac{\vec{v}\cdot(\alpha\vec{w})}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \alpha\left[\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}\right] = \alpha\cdot pr_{\vec{v}}\,\vec{w}$;
$\therefore$ (III) é V.

Q3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Considere os vetores $\vec{z} = (1,0,1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (-2,1,0)_{\mathcal{E}}$, $\vec{w} = (0,-1,1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{x} = (a,b,c)_{\mathcal{E}}$. Se $\|\vec{x}\| = 3$, $\vec{x}$ é ortogonal a $\vec{z}$ e $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ é linearmente dependente, então $|a+b+c|$ é igual a:

(a) 2;
(b) 3;
(c) 1;
(d) 7;
(e) 5.

Q4. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$. Se $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$ e a medida do ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $\frac{2\pi}{3}$, então $\|3\vec{v} - 2\vec{w}\|^2$ é igual a:

(a) 6;
(b) 36;
(c) nenhuma das outras alternativas é correta;
(d) 108;
(e) 66.

Q5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$(*) \sim \begin{cases} x - y + z = 2b, \\ x + ay - z = c, \\ -x + y + az = 1, \end{cases}$$

nas incógnitas reais x, y e z. Assinale a alternativa correta:

(a) o sistema possui infinitas soluções se, e somente se, $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$;
(b) o sistema possui uma única solução se, e somente se, $a = -1$ e $b \neq -\frac{1}{2}$;
(c) o sistema possui uma única solução se, e somente se, $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$;
(d) o sistema não possui solução se, e somente se, $a \neq -1$ e $c = 2$;
(e) o sistema não possui solução se, e somente se, $a \neq -1$ e $b = -\frac{1}{2}$.

---

3) $\vec{z} \perp \vec{x} \iff 0 = \vec{z} \cdot \vec{x} = a + c \therefore c = -a \therefore \vec{x} = (a, b, -a)_{\mathcal{E}}$

$\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ L.D. $\iff \begin{vmatrix} -2 & 0 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} -2 & 0 & a \\ 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0 \iff$

$\iff a = 2b$. Logo, $\vec{x} = (2b, b, -2b)_{\mathcal{E}}$

Finalmente, $9 = \|\vec{x}\|^2 = 9b^2 \therefore b = \pm 1$

$\therefore \vec{x} = (2, 1, -2)_{\mathcal{E}}$ ou $\vec{x} = (-2, -1, 2)_{\mathcal{E}}$. De modo que, $|a+b+c| = 1$

---

4) $\|3\vec{v} - 2\vec{w}\|^2 = (3\vec{v} - 2\vec{w}) \cdot (3\vec{v} - 2\vec{w}) = 9\|\vec{v}\|^2 - 12\,\vec{v} \cdot \vec{w} + 4\|\vec{w}\|^2$

e $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = -3$

Logo, $\|3\vec{v} - 2\vec{w}\|^2 = 9 \cdot 4 + 36 + 4 \cdot 9 = \boxed{108}$

---

5) $(*) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2b \\ 0 & a+1 & -2 & c-2b \\ 0 & 0 & a+1 & 2b+1 \end{array}\right)$

Logo, (i) se $a \neq -1$, $(\forall b, c)$, $(*)$ possui uma única solução; (ii) se $a = -1$ e $b \neq \frac{-1}{2}$, $(\forall c)$, $(*)$ não tem solução; e (iii) se $a = -1$ e $b = \frac{-1}{2}$, $\forall c$, $(*)$ tem infinitas soluções, já que neste caso y é variável livre.

Q6. A igualdade abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é válida. Qual coluna da matriz do lado direito da igualdade deve ser alterada para que a igualdade se torne válida?

(a) a primeira;
(b) a segunda;
(c) a quinta;
(d) a quarta;
(e) a terceira.

Q7. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária. Se

$$\alpha = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA},$$

então:

(a) $1 \leq \alpha$;
(b) $-1 \leq \alpha < -\frac{1}{2}$;
(c) $0 \leq \alpha < 1$;
(d) $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$;
(e) $\alpha < -1$.

6

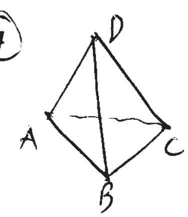
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo, é a quinta coluna que deve ser alterada. Se ela fosse substituída por $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, para que houvesse a igualdade,

deveríamos ter: $\begin{cases} a+b=0 \\ c+d=0 \\ c-d=2 \\ a-b=2 \end{cases}$. Logo, $a=c=1$ e $b=d=-1$.

$\therefore$ a última coluna deveria ser substituída por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7



$\vec{BC} \cdot \vec{AD} = (-\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = -1 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\vec{AB} \cdot \vec{CA} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\left(1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$.

$\therefore \alpha = 0 + \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2} \quad \therefore \frac{-1}{2} \leq \alpha < 0$.

Q8. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{w}\| = 1$ e tais que a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$. Se θ denota a medida do ângulo entre $\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{v}-\vec{w}$, então $\cos\theta$ é igual a:

(a) $\frac{8}{\sqrt{73}}$;
(b) $\frac{10}{3\sqrt{7}}$;
(c) $\frac{8}{\sqrt{76}}$;
(d) $\frac{10}{\sqrt{73}}$;
(e) $\frac{8}{3\sqrt{7}}$.

Q9. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3 e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1,-1,0)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (0,2,-1)_{\mathcal{B}}.$$

Assinale a alternativa contendo um vetor que é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

(a) $(-2,0,4)_{\mathcal{B}}$;
(b) $(1,2,-3)_{\mathcal{B}}$;
(c) $(5,9,-14)_{\mathcal{B}}$;
(d) $(0,10,5)_{\mathcal{B}}$;
(e) $(4,2,-3)_{\mathcal{B}}$.

(8) $\|\vec v+\vec w\|\cdot\|\vec v-\vec w\|\cdot\cos\theta = (\vec v+\vec w)\cdot(\vec v-\vec w) = \|\vec v\|^2-\|\vec w\|^2 = 9-1=8.$

$\|\vec v+\vec w\|^2 = (\vec v+\vec w)\cdot(\vec v+\vec w) = \|\vec v\|^2+2(\vec v\cdot\vec w)+\|\vec w\|^2 = 10+2(\vec v\cdot\vec w).$

Da mesma forma, $\|\vec v-\vec w\|^2 = 10-2(\vec v\cdot\vec w)$

Mas, $\vec v\cdot\vec w = \|\vec v\|\cdot\|\vec w\|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\cdot 1\cdot\frac{\sqrt3}{2} = \frac{3\sqrt3}{2}$

$\therefore\ 8 = \sqrt{10+3\sqrt3}\cdot\sqrt{10-3\sqrt3}\cdot\cos\theta = \sqrt{73}\cdot\cos\theta \quad \therefore\ \boxed{\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{73}}}$

(9) Seja $\vec x=(a,b,c)_{\mathcal B}$. $\vec x$ é combinação linear de $\vec v$ e $\vec w$ $\Leftrightarrow$ $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\ \alpha\vec v+\beta\vec w = \vec x$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \begin{cases} \alpha = a \\ -\alpha+2\beta = b \\ -\beta = c \end{cases} \Leftrightarrow (\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \begin{cases} \alpha = a \\ -\beta = c \\ 2\beta = a+b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \begin{cases} \alpha = a \\ -\beta = c \\ 0 = a+b+2c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a+b+2c=0}$$

(Note-se que só $(4,2,-3)_{\mathcal B}$, entre as alternativas presentes, satisfaz a condição $a+b+2c=0$).

Q10. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in V^3$ distintos, vale que o conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é linearmente dependente se, e somente se, todo elemento desse conjunto é combinação linear dos outros dois elementos;

(II) para quaisquer pontos $A, B, C, D \in E^3$ com $A \neq B$ e $C \neq D$, vale que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, os segmentos orientados AB e CD possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido;

(III) para quaisquer vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in V^3$ distintos, vale que o conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é linearmente independente se, e somente se, os conjuntos $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$ e $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ são todos linearmente independentes.

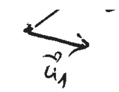
Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q11. Temos três ligas metálicas: a primeira liga contém 50% de ouro, 30% de prata e 20% de platina. A segunda liga contém 30% de ouro e 70% de prata. A terceira liga contém 40% de ouro, 50% de prata e 10% de platina. Combinando essas três ligas, criamos uma nova liga que contém 45% de ouro. Que proporção de prata contém a nova liga?

(a) 45%;
(b) 40%;
(c) 55%;
(d) 50%;
(e) 35%.

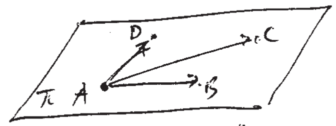
(10) Note-se que $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{c}\}$ é L.D., onde



Mas, só $\vec{c}$ é combinação linear de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$. Logo, (I) é falsa!;

Sabe-se (do corpo teórico) que (II) é verdadeira;

Para analisar (III), tomem-se em um plano π, A, B, C, D, de modo que A, B, C; A, B, D; e A, C, D sejam <u>não-colineares</u>.



Então, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ e $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ são L.I., mas $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ é L.D. (coplanares) $\therefore$ (III) é falsa!

(11) Sejam m_i a massa da i-ésima liga ($1 \leq i \leq 3$) e m a massa da 4ª liga. Assim, sendo <u>a</u> a porcentagem de prata contida na 4ª liga e <u>b</u> a porcentagem de platina contida na 4ª liga, temos:

$$\begin{cases} 0{,}5\, m_1 + 0{,}3\, m_2 + 0{,}4\, m_3 = 0{,}45\, m \\ 0{,}3\, m_1 + 0{,}7\, m_2 + 0{,}5\, m_3 = a \cdot m \\ 0{,}2\, m_1 + 0{,}1\, m_3 = b \cdot m \end{cases}$$

De modo que, sendo $\alpha_i = \frac{m_i}{m}$ ($i = 1, 2, 3$), vem:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 50\alpha_1 + 30\alpha_2 + 40\alpha_3 = 45 \\ 30\alpha_1 + 70\alpha_2 + 50\alpha_3 = 100a \\ 20\alpha_1 + 10\alpha_3 = 100b \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -20\alpha_2 - 10\alpha_3 = -5 \\ 40\alpha_2 + 20\alpha_3 = 100a - 30 \\ -20\alpha_2 - 10\alpha_3 = 100b - 20 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 20\alpha_2 + 10\alpha_3 = 5 \\ 0 = 100a - 40 \\ 0 = 100b - 15 \end{cases}$$

De modo que $\boxed{a = \frac{40}{100} = 40\%}$ e $b = 15\%$.

Q12. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1,-2,3)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (3,1,-2)_{\mathcal{B}}.$$

Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$ tais que $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x}$ é paralelo e $\vec{v}$ e $\vec{y}$ é ortogonal a $\vec{v}$. Se $\vec{y} = (a,b,c)_{\mathcal{B}}$, então $a+b+c$ é igual a:

(a) -2;
(b) $\frac{5}{7}$;
(c) 2;
(d) $\frac{15}{7}$;
(e) $\frac{19}{7}$.

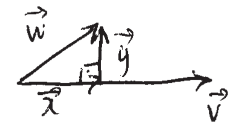
Q13. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\vec{v}+\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v}-\vec{w}$ se, e somente se, $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$;
(II) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v}-\vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$;
(III) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 3$, vale que $\|\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{13}$ se, e somente se, $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

(12)



$\vec{y} = \vec{w} - \vec{x}$ e $\vec{x} = \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}$

$\therefore \vec{x} = \left(\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \left(\dfrac{3-2-6}{14}\right)\vec{v} = \dfrac{-5}{14}(1,-2,3)_{\mathcal{B}}$

$\therefore \vec{x} = \left(\dfrac{-5}{14}, \dfrac{10}{14}, \dfrac{-15}{14}\right)_{\mathcal{B}}$ $\quad \therefore \vec{y} = (3,1,-2)_{\mathcal{B}} - \left(\dfrac{-5}{14}, \dfrac{10}{14}, \dfrac{-15}{14}\right)_{\mathcal{B}}$

$\therefore \vec{y} = \left(\dfrac{47}{14}, \dfrac{4}{14}, \dfrac{-13}{14}\right)_{\mathcal{B}}$ $\quad \therefore a+b+c = \dfrac{38}{14} = \boxed{\dfrac{19}{7}}$

(13) • $(\vec{v}+\vec{w}) \perp (\vec{v}-\vec{w}) \iff 0 = (\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 \iff$

$\iff \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ $\quad \therefore$ (I) é V.

• $\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v}-\vec{w}\| \iff \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = (\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w}) =$

$= (\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w}) \iff \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{v}\cdot\vec{w}) + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{v}\cdot\vec{w}) + \|\vec{w}\|^2$

$\iff 4(\vec{v}\cdot\vec{w}) = 0 \iff \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$.

$\therefore$ (II) é V.

• $13 = \|\vec{v}-\vec{w}\|^2 \iff 13 = \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = 13 - 2(\vec{v}\cdot\vec{w})$

$\iff \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$ (e não $\vec{v} \parallel \vec{w}$)

$\therefore$ (III) é falsa!

Q14. Considere um triângulo ABC e seja X o ponto do segmento AB tal que:

$$\|\overrightarrow{AX}\| = 2\,\|\overrightarrow{XB}\|.$$

Denote por Y o ponto médio do segmento CX. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que:

$$\overrightarrow{AY} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC},$$

então $a + b$ é igual a:

(a) $-\frac{5}{6}$;
(b) $-\frac{1}{6}$;
(c) $\frac{5}{6}$;
(d) $\frac{7}{6}$;
(e) $\frac{1}{6}$.

Q15. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2)$, para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$;

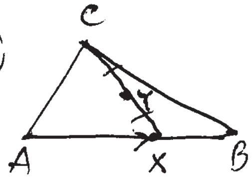
(II) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes;

(III) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

(14)



$\vec{AY} = \vec{AC} + \vec{CY} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CX} =$

$= \vec{AC} + \frac{1}{2}\left(-\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}\right)$

$\therefore \vec{AY} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ $\quad\therefore\quad a+b = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}$

(15) • $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \left(\|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{v}\cdot\vec{w}) + \|\vec{w}\|^2\right) +$
$+\left(\|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{v}\cdot\vec{w}) + \|\vec{w}\|^2\right) = 2\left(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2\right)$

$\therefore$ (I) é V.

• (II) é falsa, pois se $\vec{w} = -\vec{v} \neq \vec{0}$, temos $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ L.D

Mas $\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v} + (-\vec{v})\| = \|\vec{0}\| = 0 \neq 2\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\| + \|-\vec{v}\| =$
$= \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

• Se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$, então $|\vec{v}\cdot\vec{w}| = 0 = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ e
$\therefore \{\vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D.

Se $\vec{v} \neq \vec{0} \neq \vec{w}$ e $\theta = \widehat{\vec{v}, \vec{w}}$, então

$\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = |\vec{v}\cdot\vec{w}| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \, |\cos\theta| \Leftrightarrow |\cos\theta| = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\pi \Leftrightarrow \{\vec{v}, \vec{w}\}$ L.D. (pois $\vec{v} /\!/ \vec{w}$)

$\therefore$ (III) é V.

Q16. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

A soma dos elementos da matriz A^{-1} é igual a:

(a) 0;
(b) -3;
(c) -2;
(d) -1;
(e) 3.

16

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{matrix}}^{A} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad 1 + (-2) + 1 + (-3) + 1 + 1 + (-2) + 0 + 1 = \boxed{-2}$$