Q1. Temos três ligas metálicas: a primeira liga contém 50% de ouro, 30% de prata e 20% de platina. A segunda liga contém 30% de ouro e 70% de prata. A terceira liga contém 40% de ouro, 50% de prata e 10% de platina. Combinando essas três ligas, criamos uma nova liga que contém 45% de ouro. Que proporção de prata contém a nova liga?

(a) 45%;
(b) 40%;
(c) 50%;
(d) 35%;
(e) 55%.

Q2. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{w}\| = 1$ e tais que a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$. Se θ denota a medida do ângulo entre $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$, então $\cos\theta$ é igual a:

(a) $\frac{10}{\sqrt{73}}$;
(b) $\frac{8}{\sqrt{73}}$;
(c) $\frac{8}{\sqrt{76}}$;
(d) $\frac{8}{3\sqrt{7}}$;
(e) $\frac{10}{3\sqrt{7}}$.

Q3. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

A soma dos elementos da matriz A^{-1} é igual a:

(a) -3;
(b) 3;
(c) -2;
(d) -1;
(e) 0.

Q4. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1, -2, 3)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (3, 1, -2)_{\mathcal{B}}.$$

Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$ tais que $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x}$ é paralelo e $\vec{v}$ e $\vec{y}$ é ortogonal a $\vec{v}$. Se $\vec{y} = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$, então $a + b + c$ é igual a:

(a) $\frac{19}{7}$;
(b) 2;
(c) $\frac{5}{7}$;
(d) -2;
(e) $\frac{15}{7}$.

Q5. Considere um triângulo ABC e seja X o ponto do segmento AB tal que:

$$\|\overrightarrow{AX}\| = 2\,\|\overrightarrow{XB}\|.$$

Denote por Y o ponto médio do segmento CX. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que:

$$\overrightarrow{AY} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC},$$

então $a + b$ é igual a:

(a) $-\frac{5}{6}$;
(b) $\frac{5}{6}$;
(c) $\frac{1}{6}$;
(d) $-\frac{1}{6}$;
(e) $\frac{7}{6}$.

Q6. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3 e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (0, 2, -1)_{\mathcal{B}}.$$

Assinale a alternativa contendo um vetor que é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

(a) $(0, 10, 5)_{\mathcal{B}}$;
(b) $(1, 2, -3)_{\mathcal{B}}$;
(c) $(-2, 0, 4)_{\mathcal{B}}$;
(d) $(4, 2, -3)_{\mathcal{B}}$;
(e) $(5, 9, -14)_{\mathcal{B}}$.

Q7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Considere os vetores $\vec{z} = (1, 0, 1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (-2, 1, 0)_{\mathcal{E}}$, $\vec{w} = (0, -1, 1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{x} = (a, b, c)_{\mathcal{E}}$. Se $\|\vec{x}\| = 3$, $\vec{x}$ é ortogonal a $\vec{z}$ e $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ é linearmente dependente, então $|a + b + c|$ é igual a:

(a) 7;
(b) 1;
(c) 2;
(d) 5;
(e) 3.

Q8. Seja A uma matriz real 3×3 tal que $\det(A) = 7$. Temos que:

$$\big(\det(A^3) + \det(3A)\big) \det(A^{-1})$$

é igual a:

(a) $\frac{534}{7}$;
(b) nenhuma das outras alternativas é correta;
(c) 76;
(d) 52;
(e) 3724.

Q9. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\vec{v} + \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v} - \vec{w}$ se, e somente se, $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$;
(II) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v} - \vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$;
(III) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 3$, vale que $\|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{13}$ se, e somente se, $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q10. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in V^3$ distintos, vale que o conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é linearmente dependente se, e somente se, todo elemento desse conjunto é combinação linear dos outros dois elementos;

(II) para quaisquer pontos $A, B, C, D \in E^3$ com $A \neq B$ e $C \neq D$, vale que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, os segmentos orientados AB e CD possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido;

(III) para quaisquer vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in V^3$ distintos, vale que o conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é linearmente independente se, e somente se, os conjuntos $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$ e $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ são todos linearmente independentes.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q11. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$. Se $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$ e a medida do ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $\frac{2\pi}{3}$, então $\|3\vec{v} - 2\vec{w}\|^2$ é igual a:

(a) 66;
(b) 6;
(c) 36;
(d) 108;
(e) nenhuma das outras alternativas é correta.

Q12. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2\big(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2\big)$, para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$;

(II) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes;

(III) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(b) todas as afirmações são verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q13. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w} = \text{proj}_{\alpha\vec{v}}\,\vec{w}$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ com $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$;

(II) $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}_1 + \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}_2$, para quaisquer $\vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V^3$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$;

(III) $\text{proj}_{\vec{v}}(\alpha\vec{w}) = \alpha\,\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w}$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q14. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + z = 2b, \\ x + ay - z = c, \\ -x + y + az = 1, \end{cases}$$

nas incógnitas reais x, y e z. Assinale a alternativa correta:

(a) o sistema possui infinitas soluções se, e somente se, $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$;
(b) o sistema possui uma única solução se, e somente se, $a = -1$ e $b \neq -\frac{1}{2}$;
(c) o sistema não possui solução se, e somente se, $a \neq -1$ e $b = -\frac{1}{2}$;
(d) o sistema possui uma única solução se, e somente se, $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$;
(e) o sistema não possui solução se, e somente se, $a \neq -1$ e $c = 2$.

Q15. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária. Se

$$\alpha = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA},$$

então:

(a) $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$;
(b) $\alpha < -1$;
(c) $1 \leq \alpha$;
(d) $0 \leq \alpha < 1$;
(e) $-1 \leq \alpha < -\frac{1}{2}$.

Q16. A igualdade abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é válida. Qual coluna da matriz do lado direito da igualdade deve ser alterada para que a igualdade se torne válida?

(a) a primeira;
(b) a quarta;
(c) a segunda;
(d) a quinta;
(e) a terceira.