

Q1. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ vetores distintos e seja $L = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$ então L é linearmente dependente;
- (II) se $\vec{v}$ não é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ então L é linearmente independente;
- (III) se $\vec{u} + \vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$ então L é linearmente dependente.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q2. Seja L um subconjunto finito de V^3 . Dizemos que L é um *conjunto gerador* de V^3 se todo vetor de V^3 se escreve como combinação linear dos elementos de L . Assinale a alternativa correta:

- (a) se L é uma base de V^3 então L é um conjunto gerador de V^3 ;
- (b) L é uma base de V^3 se e somente se L é linearmente independente;
- (c) se L é um conjunto gerador de V^3 então L é uma base de V^3 ;
- (d) se L é um conjunto gerador de V^3 então L é linearmente independente;
- (e) L é linearmente independente se e somente se L é um conjunto gerador de V^3 .

Q3. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$. Suponha que $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, que $\|\vec{v}\| = 1$ e que a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$. O cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{u} + \vec{v}$ é igual a:

- (a) $\frac{3\sqrt{21}}{14}$;
- (b) $\frac{9\sqrt{7}}{14}$;
- (c) $\frac{9\sqrt{21}}{7}$;
- (d) $\frac{9\sqrt{3}}{7}$;
- (e) $\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

Q4. Seja fixada uma orientação em V^3 e seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal positiva de V^3 . Considere os vetores $\vec{u} = (2, 0, 1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (1, 1, 3)_{\mathcal{E}}$. Sabe-se que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal positiva de V^3 , que $\vec{a}$ tem a mesma direção e sentido que $\vec{u}$, que $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e que $\vec{b}$ tem a primeira coordenada na base $\mathcal{E}$ negativa. Assinale a alternativa correta:

- (a) $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{b} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{c} = (-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})_{\mathcal{E}}$;
- (b) $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{b} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{c} = (-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})_{\mathcal{E}}$;
- (c) $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{b} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{c} = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}})_{\mathcal{E}}$;
- (d) $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{b} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{c} = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}})_{\mathcal{E}}$;
- (e) $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{b} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})_{\mathcal{E}}$, $\vec{c} = (-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})_{\mathcal{E}}$.

Q5. Sejam $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3 , $\vec{a} = (1, 2, 2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{b}$ a projeção ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{u} = (2, 1, 0)_{\mathcal{E}}$. Se $\vec{OA} = \vec{a}$ e $\vec{OB} = \vec{b}$ então a área do triângulo OAB é igual a:

- (a) $\frac{2\sqrt{29}}{5}$;
- (b) $\frac{4\sqrt{29}}{5}$;
- (c) $\frac{\sqrt{29}}{5}$;
- (d) $\frac{\sqrt{29}}{10}$;
- (e) $\frac{\sqrt{29}}{20}$.

Q6. Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bases de V^3 tais que:

$$\vec{f}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = 3\vec{e}_3.$$

Dado $\vec{u} \in V^3$, denote por (a, b, c) as coordenadas de $\vec{u}$ na base $\mathcal{E}$ e por (α, β, γ) as coordenadas de $\vec{u}$ na base $\mathcal{F}$. A matriz M tal que:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

é:

(a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$

(b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

(d) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

(e) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$

Q7. Seja $\mathcal{E}$ uma base de V^3 e considere a base $\mathcal{F}$ de V^3 definida por:

$$\mathcal{F} = \{(1, 0, 2)_{\mathcal{E}}, (1, 1, 0)_{\mathcal{E}}, (0, 1, -1)_{\mathcal{E}}\}.$$

Se $\vec{u} = (1, 2, 3)_{\mathcal{E}}$ então a soma das coordenadas de $\vec{u}$ na base $\mathcal{F}$ é igual a:

(a) 6;

(b) 7;

(c) 8;

(d) 9;

(e) 10.

Q8. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ tais que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 2$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $\vec{w}$ o vetor definido por:

$$\vec{w} = (\vec{u} + \lambda\vec{v}) \wedge (2\vec{u} + \vec{v}).$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) se a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{4}$ e se $\lambda = \frac{1}{4}$ então $\vec{w}$ é unitário;
- (II) se a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{3\pi}{4}$ e se $\lambda = \frac{1}{4}$ então $\vec{w}$ é unitário;
- (III) se a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{2}$ e se $\lambda = \frac{1}{3}$ então $\vec{w}$ é unitário.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q9. Sejam $\mathcal{E}$ uma base de V^3 , $m \in \mathbb{R}$, $\vec{u}_1 = (1, m, 0)_{\mathcal{E}}$, $\vec{u}_2 = (1, 0, m)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{u}_3 = (1, 2, 1)_{\mathcal{E}}$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se $m \neq 0$ então todo vetor de V^3 se escreve como combinação linear de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$;
- (b) se $m = 2$ então $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é linearmente independente;
- (c) se $m = 5$ então $(3, -2, 4)_{\mathcal{E}}$ é combinação linear de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$;
- (d) se $m = 3$ então $\vec{u}_3$ é combinação linear de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$;
- (e) se $m = 7$ então $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é uma base de V^3 .

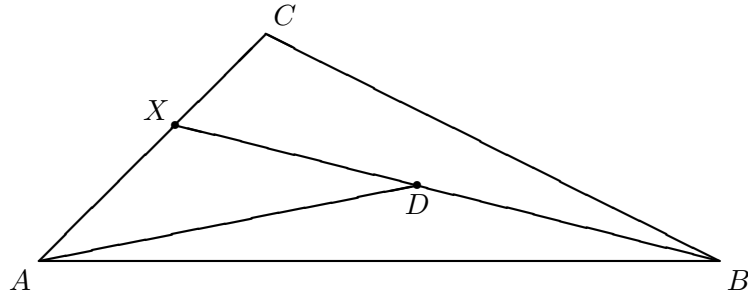
Q10. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ vetores não nulos. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w}$ se e somente se $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$;
- (II) se $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ então $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} + \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} + \text{proj}_{(\vec{u} \wedge \vec{v})} \vec{w}$;
- (III) $\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ se e somente se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q11. Considere o triângulo ABC ilustrado na figura abaixo:



O ponto X está sobre o segmento AC e o ponto D está sobre o segmento BX . Se $6\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, pode-se afirmar que:

- (a) $4\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{AC}$;
- (b) $3\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AC}$;
- (c) $5\overrightarrow{AX} = 4\overrightarrow{AC}$;
- (d) $2\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC}$;
- (e) $5\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{AC}$.

Q12. Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3 . Se $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ são tais que:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2, -1, 2)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{2},$$

pode-se afirmar que:

- (a) $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = 3\sqrt{3}$;
- (b) $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$;
- (c) $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$;
- (d) $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = 4\sqrt{3}$;
- (e) $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$.

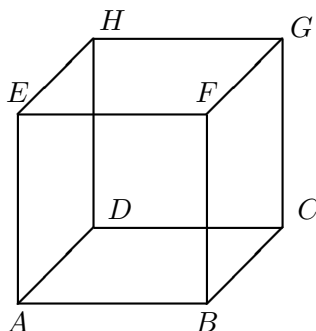
Q13. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ vetores unitários tais que $4\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\vec{w} \in V^3$ é tal que:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 1, \quad \vec{w} \cdot \vec{v} = 2,$$

pode-se afirmar que:

- (a) $\alpha + \beta = \frac{12}{7}$;
- (b) $\alpha + \beta = \frac{9}{5}$;
- (c) $\alpha + \beta = \frac{13}{8}$;
- (d) $\alpha + \beta = \frac{11}{3}$;
- (e) $\alpha + \beta = \frac{10}{7}$.

Q14. Considere o cubo $ABCDEFGH$ ilustrado na figura abaixo:



Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ as bases de V^3 definidas por:

$$\mathcal{F} = \{\vec{AC}, 2\vec{AG}, -2\vec{AH}\}, \quad \mathcal{G} = \{2\vec{AB}, \vec{BH}, -\vec{AC}\}.$$

Pode-se afirmar que o determinante da matriz de mudança de base $M_{\mathcal{G}\mathcal{F}}$ é igual a:

- (a) 2;
- (b) $\frac{1}{2}$;
- (c) 8;
- (d) $\frac{1}{8}$;
- (e) 4.

Q15. Seja fixada uma orientação em V^3 e seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal positiva de V^3 . Se $\vec{u} = (2, -1, 1)_{\mathcal{E}}$ e se $\vec{v} \in V^3$ é tal que $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 2, 0)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, pode-se afirmar que a soma das coordenadas de $\vec{v}$ na base $\mathcal{E}$ é igual a:

- (a) $-\frac{2}{3}$;
- (b) $-\frac{5}{6}$;
- (c) $-\frac{1}{6}$;
- (d) $\frac{1}{2}$;
- (e) $\frac{1}{3}$.

Q16. Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal de V^3 e $\vec{u} = (1, -2, 3)_{\mathcal{E}}$. Se $\vec{w} \in V^3$ é tal que $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ é linearmente dependente e $\vec{w} \cdot \vec{e}_3 = 6$, pode-se afirmar que a soma das coordenadas de $\vec{w}$ na base $\mathcal{E}$ é igual a:

- (a) 4;
- (b) 2;
- (c) 1;
- (d) 3;
- (e) 5.