

Convenções:

- Dado um inteiro positivo n , o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais será denotado por $M_n(\mathbb{R})$.
- Se A é uma matriz, a matriz transposta de A será denotada por A^t .
- Coordenadas de pontos estão dadas em relação a um sistema ortogonal.
- A norma (ou comprimento) de um vetor \vec{u} será denotada por $\|\vec{u}\|$.
- Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções, define-se a função composta de S com T como sendo a função $S \circ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Q1. Considere as seguintes afirmações a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

- (I) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0} = \vec{w} \wedge \vec{v}$, então $\vec{w} = \vec{0}$.
- (II) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.
- (III) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é uma combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .

É correto o que se afirma em

- (a) (I) e (II), apenas.
- (b) (I), (II) e (III).
- (c) (I) e (III), apenas.
- (d) (II), apenas.
- (e) (II) e (III), apenas.

Q2. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- (a) Se A é diagonalizável, então A possui n autovalores distintos.
- (b) A e sua transposta A^t possuem os mesmos autovalores.
- (c) Se A é diagonalizável e invertível, então sua inversa A^{-1} também é diagonalizável.
- (d) Se A é diagonalizável, então sua transposta A^t também é diagonalizável.
- (e) Se A possui n autovalores (reais) distintos, então A é diagonalizável.

Q3. Considere o plano $\pi : x - 2y + 2z - 5 = 0$. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores tais que \vec{u} é paralelo a π , \vec{v} é ortogonal a π e $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3, -1)$, então a soma das coordenadas de \vec{u} é igual a

- (a) $10/3$
- (b) $14/3$
- (c) 4
- (d) $-2/3$
- (e) 2

Q4. Se \vec{u} e \vec{v} são vetores tais que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3}$, e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} mede $\pi/3$ radianos, então o valor de $\|\vec{v}\|$ é

- (a) $1/2$
- (b) $\sqrt{2}/2$
- (c) 1
- (d) $\sqrt{3}$
- (e) $\sqrt{3}/2$

Q5. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, em que $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Se $a = 1/2$, então A é diagonalizável.
- (b) Se A é diagonalizável, então $a > 0$.
- (c) Se $a = 0$, então 0 é um autovalor de A , de multiplicidade 3.
- (d) Os autovalores de A são as raízes reais do polinômio $(x^2 - a)(x - a)$.
- (e) Se $0 \leq a < 1/2$, então A é diagonalizável.

Q6. Considere o plano π de equação $ax + by + cz - 12 = 0$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabendo que $B = (-1, 6, 5)$ é o ponto simétrico do ponto $A = (1, 2, 3)$ em relação a π , pode-se afirmar que $a + b + c$ é igual a

- (a) 0
- (b) -4
- (c) 2
- (d) -2
- (e) 4

Q7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A respeito do sistema

$$(*) \quad \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 2b \\ -5y + 2az = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

é correto afirmar que

- (a) se $a \neq 2$ e $b \in [0, 1]$, então (*) tem solução.
- (b) se $a = b = 1/2$, então (*) tem uma única solução.
- (c) se $a = 2$ e $b \in [0, 1]$, então (*) tem uma única solução.
- (d) se $b \neq -1/2$ e $a = 2$, então (*) tem infinitas soluções.
- (e) se $b = -1/2$ e $a \neq 2$, então (*) tem infinitas soluções.

Q8. Considere o plano π de equação $x + y + z = 0$ e seja r a reta perpendicular a π tal que $B = (3, -1, 4)$ seja o ponto simétrico do ponto $A = (2, 1, 3)$ com relação a r . Se $P = (a, b, c)$ é o ponto de encontro entre r e π , então $-2a + b + 2c$ é igual a

- (a) 2
- (b) -2
- (c) 1
- (d) 0
- (e) -1

Q9. Se T é a rotação, em \mathbb{R}^2 , em torno da origem, de ângulo $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário e $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação tal que $S \circ T$ é a reflexão em relação à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, então S é a reflexão em relação à reta

- (a) $x = 0$
- (b) $y = x$
- (c) $y = \frac{1}{2}x$
- (d) $y = \sqrt{3}x$
- (e) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

Q10. Seja A uma matriz $n \times n$ e suponha que a única solução do sistema $AX = 0$ seja a solução nula. Assinale a alternativa **FALSA**.

- (a) 0 é um autovalor de A .
- (b) A matriz transposta A^t de A tem determinante não nulo.
- (c) Se R é uma matriz escalonada obtida a partir de A por operações elementares sobre linhas, então R não tem linhas nulas.
- (d) Se B é uma matriz $n \times n$ tal que $BA = 0$, então $B = 0$.
- (e) Para todo $b \in \mathbb{R}^n$, o sistema $AX = b$ tem uma única solução.

Q11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação matricial induzida pela matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Assinale a afirmação **FALSA**.

- (a) A imagem, por T , do quadrado unitário tem área 1, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.
- (b) Se T é uma isometria, então $a^2 + b^2 = 1$.
- (c) Se T é uma isometria, a imagem, por T , do quadrado unitário tem área 1.
- (d) Se $a^2 + b^2 = 1$, então T é uma isometria.
- (e) Se a imagem, por T , do quadrado unitário tem área 1, então T é uma isometria.

Q12. Dado que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} X(t)$$

é

(a) $X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(b) $X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(c) $X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(d) $X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(e) $X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

Q13. Considere a reta $r : \begin{cases} x = m + 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + n\lambda \end{cases}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), em que $m, n \in \mathbb{R}$. Se

a distância entre r e o plano de equação $x + 2y + 3z - 6 = 0$ é $\frac{\sqrt{14}}{7}$, então $m + n$ é igual a

- (a) 0 ou -4
- (b) 0 ou -2
- (c) 2 ou -4
- (d) 2 ou -2
- (e) 0 ou 2

Q14. A respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que

- (a) A tem exatamente dois autovalores distintos e é diagonalizável.
- (b) A tem exatamente dois autovalores distintos e não é diagonalizável.
- (c) os únicos autovalores de A são 1 e 2.
- (d) A tem três autovalores distintos.
- (e) A possui um único autovalor.

Q15. Se $P = (a, b, c)$ é o ponto de encontro entre as retas

$$r : \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : -x + 3 = y = z - 1,$$

então $a + b + c$ é igual a:

- (a) 8
- (b) 7
- (c) 5
- (d) 4
- (e) 6

Q16. A respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, em que $a \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que

- (a) se $a = 3$, então A é diagonalizável.
- (b) se A é diagonalizável, então $a \leq 0$.
- (c) se $a > 4$, então A é diagonalizável.
- (d) se $a = 0$, então A é diagonalizável.
- (e) se A é diagonalizável, então $a > 4$.