GABARITO (Substitutiva)

(1) Considere $\pi: ax+by+cz-12=0$. Sabendo que $B=(-1,6,5)$ é simétrico de $A=(1;2;3)$ em relação a π, pode-se afirmar que $a+b+c$ é:

Sol. $(a,b,c) \perp \pi$ e $\vec{AB}=(-2,4,2)=2(-1,2,1) \perp \pi$. Logo $(a,b,c) \,//\, (-1,2,1)$.

$\therefore (\exists \alpha \in \mathbb{R})$ $(a,b,c)=\alpha(-1,2,1)$. Logo, $\pi: (-\alpha)x+(2\alpha)y+\alpha z-12=0$.

Mas, sabe-se também que se M é ponto médio de AB, então $M=(0,4,4)\in\pi$.

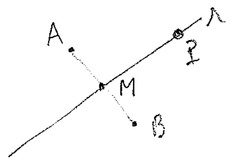
De modo que $(-\alpha)(0)+2\alpha(4)+\alpha(4)-12=0$. $\therefore 12\alpha-12=0$ $\therefore \alpha=1$.

$\therefore a=-1$; $b=2$; $c=1$ $\therefore \boxed{a+b+c=2}$

---

(2) $\pi: x+y+z=0$; $r\perp\pi$; $B=(3,-1,4)$ é o sim. do $A=(2,1,3)$ em rel. a r.
$P=(a,b,c)$ e $\{P\}=r\cap\pi$. Então $-2a+b+2c$ é igual a:

Sol:



$\left.\begin{array}{l} r\perp\pi \\ \vec{n}=(1,1,1)\perp\pi \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1,1)\,//\,r.$

$M=\left(\frac{5}{2},0,\frac{7}{2}\right)=$ pto. médio de AB $\therefore M\in r$.

Logo, como $P=(a,b,c)\in r$, $(\exists\alpha\in\mathbb{R})$ $\vec{MP}=\alpha(1,1,1)$

Daí, $P=\left(\frac{5}{2}+\alpha,\alpha,\frac{7}{2}+\alpha\right)$. Mas $P\in\pi$. Assim, $\left(\frac{5}{2}+\alpha\right)+\alpha+\left(\frac{7}{2}+\alpha\right)=0$.

De modo que $3\alpha+6=0$, $\therefore \alpha=-2$ $\therefore P=\left(\frac{1}{2},-2,\frac{3}{2}\right)$.

$\therefore -2a+b+2c=-1-2+3=\boxed{0}$

---

(3) $r: \begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \end{cases}$; $s: -x+3=y=z-1$; $\{P\}=r\cap s$; $P=(a,b,c)$.

Então, $a+b+c=?$

Sol. $P\in r \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ b+c=5 \end{cases}$ e $P\in s \Leftrightarrow \begin{cases} -a+3=b \\ c-1=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ b-c=-1 \end{cases}$

Logo, $P\in r\cap s \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ b+c=5 \\ b-c=-1 \end{cases}$ $\therefore \boxed{\begin{array}{l} b=2 \\ c=3 \\ a=1 \end{array}}$ $\therefore \boxed{a+b+c=6}$

---

(4) $m,n\in\mathbb{R}$; $r: \begin{cases} x=m+2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+n\lambda \end{cases}$; $\pi: x+2y+3z-6=0$. $d(r,\pi)=\frac{\sqrt{14}}{7}$. Então, $m+n=?$

Sol: r deve ser paralela a π; $\vec{r}=(1,1,n)\,//\,r$ e $(1,2,3)\perp\pi$.

Logo $(1,1,n)\perp(1,2,3)$. De modo que $0=1+2+3n$ $\therefore \boxed{n=-1}$

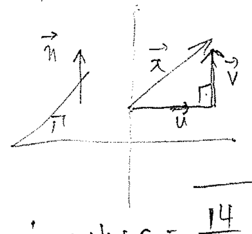
Ademais, $P=(m+2,1,1)\in r$. Logo $\frac{\sqrt{14}}{7}=d(P,\pi)=\frac{|m+2+2+3-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{14}}$

$\therefore 2=|m+1|$ $\therefore$ $m+1=2$ ou $m+1=-2$ $\Leftrightarrow$ $m=1$ ou $m=-3$ $\therefore \boxed{\begin{array}{c} m+n=0 \\ \text{ou} \\ m+n=-4 \end{array}}$

(5) $\pi: x-2y+2z-5=0$; $\vec{u}=(a+b+c) \,//\, \pi$; $\vec{v} \perp \pi$; $\vec{u}+\vec{v}=(2,3,-1)=\vec{x}$

Então, $a+b+c=?$

Sol.:



$\vec{v}=pr_{\vec{n}}\,\vec{x}=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}=\left(\dfrac{2-6-2}{9}\right)\vec{n}=\dfrac{-2}{3}(1,-2,2)=\left(\dfrac{-2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{-4}{3}\right)$

$\vec{n}=(1,-2,2)$

$\therefore\ \vec{u}=\vec{x}-\vec{v}=(2,3,-1)-\left(\dfrac{-2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{-4}{3}\right)=\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right).$

$\therefore\ a+b+c=\boxed{\dfrac{14}{3}}$

---

(6) $(a,b\in\mathbb{R})$ $(*):\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y-2z=2b \\ -5y+2az=7 \\ 4x-3y=5 \end{cases}$, Discutir o sistema:

Sol.: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 2b \\ 0 & -5 & 2a & 7 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -6+2b \\ 0 & -5 & 2a & 7 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 2a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b+1 \end{array}\right)$

Logo, (I) $2b+1\neq 0 \Leftrightarrow b\neq\frac{-1}{2}$, o sistema é impossível $(S=\emptyset)$.

(II) Se $b=\frac{-1}{2}$ e (i) $a\neq 2$, então o sistema é possível e determinado

Já se (ii) $a=2$, o sistema é possível e indeterminado — no caso possui 2 variáveis livres.

Em particular, (se $a\neq 2$ e $b\in[0,1]$, então $(*)$ NÃO tem solução)

---

(7) Considere as afirmações: Quais são corretas?

(I) $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$ e $\vec{w}\wedge\vec{u}=\vec{0}=\vec{w}\wedge\vec{v} \Rightarrow \vec{w}=\vec{0}$

(II) $\vec{u}\neq\vec{0}$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$

(III) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ é comb. linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Sol. (I). $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0} \Rightarrow \vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos. Em particular $\vec{u}\neq\vec{0}\neq\vec{v}$.

Agora, $\vec{w}\wedge\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow (\exists\alpha\in\mathbb{R})\ \vec{w}=\alpha\vec{u}$. Logo, $\alpha\vec{u}=\beta\vec{v}$.

$\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow (\exists\beta\in\mathbb{R})\ \vec{w}=\beta\vec{v}$

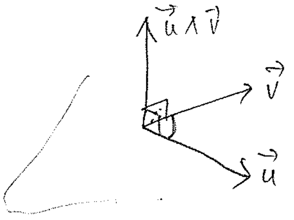
Se $\alpha\neq 0$, então $\vec{u}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\vec{v}$ e $\therefore\ \vec{u}\,//\,\vec{v}$, o que já sabemos que não ocorre. $\therefore\ \alpha=0$ e $\therefore\ \boxed{\vec{w}=0\cdot\vec{u}=\vec{0}.}$ $\therefore$ (I) é verdadeira.

(II) $\left.\begin{array}{l}\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\\ \vec{u}\neq\vec{0}\end{array}\right\} \Rightarrow (\exists\alpha\in\mathbb{R})\ \vec{v}=\alpha\vec{u}$ $\therefore$ $0=\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{u})=\alpha\|\vec{u}\|^2$

De modo que, como $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\alpha=0$. e $\therefore\ \vec{v}=\vec{0}$. $\therefore$ (II) é verdadeira.

(III) (i) Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ e $\therefore (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{0}$. Logo, é comb. linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(ii) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos então $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ e temos:



Daí, por def, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é $\perp$ a $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Logo, deve ser paralelo a $\forall$ plano paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$\therefore (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é comb. linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$\therefore$ (III) é verdadeira.

---

(8) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ e suponha que $AX = 0$ só tem a solução nula. Então é <u>falso</u> afirmar que 0 é autovalor de A, pois se 0 fosse, $(\exists X \in \mathbb{R}^n)$ $X \neq 0$ tq. $AX = 0 \cdot X = 0$, contra a hipótese.

---

(9) $\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3}$; $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 60°$. Então $\|\vec{v}\| = ?$

Sol. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 60° = \dfrac{\|\vec{v}\|}{2}$; $3 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 = 1 + \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$

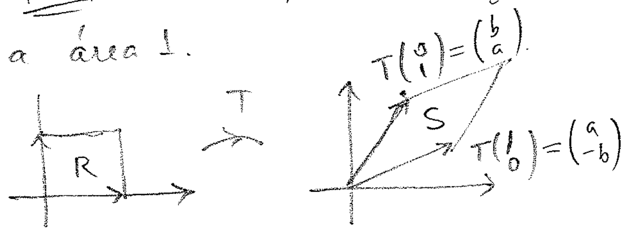
$\therefore \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\| - 2 = 0$ $\therefore$ $\|\vec{v}\| = -2$ (absurdo) ou $\boxed{\|\vec{v}\| = 1}$

---

(10) $a, b \in \mathbb{R}$; $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Então é <u>falso</u> afirmar que a imagem por T do quadrado unitário tem a área 1.

De fato.



Ora, sabemos que a área de S é $|\det(A)| = \underline{a^2 + b^2}$ que <u>não</u> necessariam/ é igual a 1.

---

(11) T = rotação do $\mathbb{R}^2$ em torno da origem de âng. $\frac{\pi}{3}$ (sent. anti-horário)

$S \circ T$ = reflexão em rel. à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$. Determinar S.

Sol. $T(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$; onde $A = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\operatorname{sen} \pi/3 \\ \operatorname{sen} \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Se $S(\vec{u}) = B \cdot \vec{u}$, então $S \circ T(\vec{u}) = (B \cdot A)\vec{u}$.

Assim $B \cdot A = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 & 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 \end{pmatrix} = \dfrac{3}{4} \begin{pmatrix} 2/3 & 2\sqrt{3}/3 \\ 2\sqrt{3}/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Logo, $B = (B \cdot A) \cdot A^{-1} = (B \cdot A) \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

De modo que B representa uma reflexão em torno da reta que passa pela origem, com coef. angular m,

$\therefore B = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$. Logo, $\dfrac{1-m^2}{1+m^2} = \dfrac{-1}{2}$ e $\dfrac{2m}{1+m^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

De modo que, $\dfrac{1-m^2}{1+m^2} = \dfrac{-1}{2} \iff 2-2m^2 = -1-m^2 \iff m^2 = 3 \iff m = \sqrt{3}$ ou $m = -\sqrt{3}$

$\dfrac{2m}{1+m^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff 4m = \sqrt{3}\,m^2 + \sqrt{3} \iff \sqrt{3}\,m^2 - 4m + \sqrt{3} = 0 \iff$

$\iff m = \sqrt{3}$ ou $m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\boxed{m = \sqrt{3}}$. $\therefore$ $\boxed{S \text{ é a reflexão em relação à reta } y = (\sqrt{3})x}$

---

(12) Quando $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.?

Sol: $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & -1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+2)t + 2a+1$; $\Delta = (2+a)^2 - 4(2a+1) = a(a-4)$

Assim, se $\Delta > 0$ (i.e., $a > 4$ ou $a < 0$), χ_A tem 2 raízes reais e distintas. Logo, p/ $a > 4$ (ou $a < 0$) A é diagonalizável.

Em part., $a > 4 \Rightarrow$ A diagonalizável.

---

(13) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. O que dizer sobre os autoval. de A e se A é ou não diagonalizável.

Sol. $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(-1-t)$ $\therefore$ $\boxed{\text{A tem exatam/ 2 autovalores distintos.!}}$

Ademais, $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ é autovetor de A associado a 1 $\iff (A - I_3)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ $b = 0$, a, c quaisquer.

$\therefore$ A é diagonalizável, pois as raízes de χ_A são todas reais, a multiplicidade de 1 é 2 e o sist. $(A - I_3)\cdot x = 0$ tem 2 variáveis livres.

---

(14) Resolver o sistema: $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} X(t) = A \cdot X(t)$.

Sol.: É dado que $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza A e $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Logo, a sol. geral do sist. será $X(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(15) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ A é diagonalizável?

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & a & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & a-t \end{vmatrix} = (-t)(-t)(a-t) - a(a-t) = (t^2-a)(a-t)$$

$\therefore$ os autovalores de A são a, $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$.

Assim é $\boxed{\text{falso afirmar que se } 0 \leq a < \frac{1}{2}, \ A \text{ é diagonalizável.}}$

pois se $a=0$, A não é diagonalizável.

Com efeito, se $a=0$, então $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Se A fosse diagonaliz.,

então $(\exists P) \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = 0$ (pois os autov. de A seriam todos nulos!).

Assim, teríamos $A = 0$, o que é absurdo!

---

(16) É falso afirmar que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável, então A possui n autovalores distintos, como mostra o exemplo seguinte.

Seja $A = \dot{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A é diagonal (e $\therefore$ diagonalizável).

Mas seus autovalores não são distintos (são 0 e 0!).
