MAT2457 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA I

Resolução da 3ª Prova - 1º semestre de 2014

Questão 1. Seja A uma matrix 3×3 com autovalores $1, -1, 2$. Seja $B = A^3 - 5A^2$. Considere as seguintes afirmações:

(I) B não é necessariamente diagonalizável; `Falsa`

(II) B é diagonalizável e o valor de seu determinante é -288; `Verdadeira`

(III) A soma dos autovalores de B é -22. `Verdadeira`

Assinale a alternativa correta:

(a) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras; `Alternativa correta`

(b) Apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(c) Apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(d) Todas as afirmações são falsas;

(e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Solução: Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A então $\lambda^3 - 5\lambda^2$ é um autovalor de B. Assim -4, -6 e -12 são autovalores de B. Considerando que uma matriz 3×3 possui no máximo 3 autovalores, esses são todos os seus autovalores. Uma matriz $n \times n$ com n autovalores distintos é diagonalizável e os valores da diagonal, de uma matriz diagonal semelhante, são seus autovalores. Assim, B é semelhante à matriz diagonal $D = \text{diag}\{-4, -6, -12\}$. Duas matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores e o mesmo valor do determinante. Potanto $\det(B) = \det(D) = (-4)(-6)(-12) = -288$, e a soma de seus autovalores é $(-4) + (-6) + (-12) = -22$. $\square$

Questão 2. Considere as seguintes afirmações a respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$:

(I) A é diagonalizável e a soma de seus autovalores é -1; `Verdadeira`

(II) A entrada $(1,1)$ de A^n é $\frac{4 \cdot 2^n - (-3)^n}{5}$; `Falsa`

(III) A entrada $(1,1)$ de A^n é $\frac{2^{n+2} + (-3)^n}{5}$. `Verdadeira`

Assinale a alternativa correta:

(a) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras; `Alternativa correta`

(b) Apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(c) Apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(d) Todas as afirmações são falsas;

(e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Solução: Seu polinômio característico é $c_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} = x^2 + x - 6$. Suas raizes são os autovalores de A: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. A matriz A é quadrada 2×2 com 2 autovalores distintos, logo diagonalizável e a soma de seus autovaloes é -1. Seja $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, sendo a primeira coluna um autovetor associado ao autovalor λ_1 e a segunda coluna um autovetor associado ao autovalor λ_2. Se $D = \text{diag}(2, -3)$, então
$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2^{n+2} + (-3)^n & 2^{n+2} - 4(-3)^n \\ 2^n - (-3)^n & 2^n + 4(-3)^n \end{bmatrix}$. $\square$

Questão 3. Seja T a transformação em $\mathbb{R}^2$ que resulta de uma rotação, em torno da origem, de 60° no sentido anti-horário, seguida por uma reflexão em relação à reta $y = x$. Se A é a matriz que induz a transformação T, então

(a) T é uma isometria e $\det(A) = -1$. `Alternativa correta`

(b) T é a projeção sobre a reta $y = \frac{1}{4}x$.

(c) T é uma rotação.

(d) a soma dos elementos na diagonal principal de A é igual a 1.

(e) a matriz A não possui autovalores.

Solução: A composição de uma rotação com uma reflexão é sempre uma reflexão e as reflexões são isometrias. O determinante da matriz de uma reflexão em $\mathbb{R}^2$ é sempre -1. A matriz da reflexão em relação a uma reta $y = mx$ é $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}$. A matriz B de T é

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

que portanto corresponde a uma reflexão em relação à reta $r : X = \lambda(1, 2-\sqrt{3})$. Observamos que um vetor diretor de r é qualquer autovetor da matriz B associado ao autovalor 1. O coeficiente angular da reta r é $2-\sqrt{3}$, logo $r : y = (2-\sqrt{3})x$. □

Questão 4. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação matricial que satisfaz $T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$, e seja T^{-1} a transformação inversa de T. Então, a soma das coordenadas de $T^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ é

$$-4, \quad 2, \quad -1, \quad -5, \quad 3.$$

Solução: Consideramos uma matriz $M = (A|B)$ de tamanho 2×4, sendo $A = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} T^{-1}(\vec{u}) \\ T^{-1}(\vec{v}) \end{bmatrix}$. Fazemos operações elementares por linhas em M até obter uma matriz na forma $(I_2|P)$. Podemos agora afirmar que T^{-1} é a transformação matricial induzida por P^t. Assim

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right],$$

logo $T^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}$. A soma de suas coordenadas é $(-3)+(-1) = -4$. □

Questão 5. Assinale a afirmação verdadeira a respeito da transformação matricial T de $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = \frac{1}{5}(-3x+4y, 4x+3y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) T é a reflexão em relação à reta $y = 2x$. `Alternativa correta`

(b) T é uma rotação.

(c) T é a reflexão em relação à reta $X = \lambda(2,1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

(d) A imagem, por T, do quadrado unitário tem área estritamente maior do que 1.

(e) T é a projeção sobre reta $X = \lambda(2,1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Solução: Temos que T é uma transformação matricial induzida por $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ com determinante -1. Portanto, não é uma rotação (o determinante da matriz de uma rotação é 1) e não é uma projeção (o determinante da matriz de uma projeção é 0). Por outro lado, a área da imagem do quadrado unitário é $|\det(A)| = 1$. Finalmente, observamos que a matriz da reflexão em relação à reta $y = mx$ é $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}$. Para $m = 2$ obtemos a matriz A, logo T é uma reflexão em relação à reta $y = 2x$ ou equivalentemente uma reflexão em relação à reta $X = \lambda(1,2)$. □

Questão 6. Considere as seguintes afirmações sobre o quadrado Q, em $\mathbb{R}^2$, de vértices $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$ e $(0,-1)$.

(I) Existe uma reflexão que transforma o quadrado unitário em Q.

(II) Se a transformação matricial induzida por $A \in M_2(\mathbb{R})$ transforma o quadrado unitário em Q, então $\det(A) \neq 1$.

(III) Existe uma rotação que transforma o quadrado unitário em Q.

Está correto o que se afirma em

(a) (I) e (III), apenas. `Alternativa correta`

(b) (III), apenas.

(c) (II), apenas.

(d) (I), (II), (III).

(e) (I), apenas.

Solução: (I) `Verdadeira`. A reflexão em relação à reta $y = -x$.
(II) `Falsa`. A reflexão do item (I).
(III) `Verdadeira`. A rotação de ângulo π no sentido anti-horário. □

Questão 7. Assinale a afirmação correta a respeito das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) B e C são semelhantes, e A e B não são semelhantes. `Alternativa correta`

(b) A e B são semelhantes, e B e C não são semelhantes.

(c) A, B e C são, duas a duas, semelhantes.

(d) A e C são semelhantes, e B e C não são semelhantes.

(e) A e B não são semelhantes, e B e C também não são semelhantes.

Solução: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, e

$$c_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-2) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(x-2)^2$$

$$c_B(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(x-1)(x-2),$$

$$c_B(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(x-1)(x-2).$$

Portanto, A não é semelhante a B ou C. Por outro lado, B e C são matrizes 3×3 com três autovalores diferentes, logo são diagonalizáveis e ambas são semelhantes à matriz diagonal $\operatorname{diag}\{0, 1, 2\}$. Consequentemente, B e C são semelhantes. □

Questão 8. A solução geral do sistema de equações diferencias $\begin{cases} y' = -2y + z \\ z' = y - 2z \end{cases}$ é

(a) $y(t) = ce^{-t} + de^{-3t}, \quad z(t) = ce^{-t} - de^{-3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$ `Alternativa correta`

(b) $y(t) = ce^{t} + de^{3t}, \quad z(t) = ce^{t} - de^{3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$

(c) $y(t) = -ce^{-t} + de^{-3t}, \quad z(t) = ce^{-t} - de^{-3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$

(d) $y(t) = -ce^{t} + de^{3t}, \quad z(t) = ce^{t} - de^{3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$

(e) $y(t) = ce^{-t}, \quad z(t) = de^{-3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$

Solução: Temos que $\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, sendo $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. As raizes de seu polinômio característico

$$c_A(x) = \begin{vmatrix} -2-x & 1 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3),$$

são os autovalores de A. Assim $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$ são os autovalores de A. Um autovetor $\vec{u}_i$ associado ao autovalor λ_i é uma solução não trivial do sistema $(A - \lambda_i I)X = 0$. Por exemplo, temos que $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma autovetor associado ao autovalor -1 e $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é uma autovetor associado ao autovalor -3. Neste caso, sabemos que a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = c\vec{u}_1 e^{\lambda_1 t} + d\vec{u}_2 e^{\lambda_2 t} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + d \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} ce^{-t} + de^{-3t} \\ ce^{-t} - de^{-3t} \end{bmatrix},$$

com $c, d \in \mathbb{R}$. □

Questão 9. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a projeção T sobre a reta $y = 2x$ e seja $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ a matriz de T. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é inversível. `Falsa.`

(II) A é diagonalizável e $(1, 2)$ é um autovetor de A. `Verdadeira.`

(III) Os autovalores de A são 0 e 1. `Verdadeira.`

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras. `Alternativa correta.`

(b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(c) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(d) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

(e) Todas as afirmações são falsas.

Solução: Temos $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Como $\det(A) = 0$, A não é inversível. Segue que (I) é falsa.

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Portanto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é autovetor de A associado ao autovalor 1 e (II) é verdadeira.

$A \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Portanto 0 é autovalor de A associado ao autovetor $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Portanto 0 e 1 são autovalores de A e como A é 2×2, são os únicos autovalores de A. Segue que (III) é verdadeira.

Questão 10. Seja T a transformação de $\mathbb{R}^2$ dada pela rotação, em torno da origem, de $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário, seguida da reflexão em relação à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. A matriz de T é, então,

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ `Alternativa correta.`

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(e) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: Sejam A a matriz de T, B a matriz da rotação , em torno da origem, de $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário e C a matriz da reflexão em relação à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Temos $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $C = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Portanto $A = C \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Questão 11. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a rotação S, em torno da origem, de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, e a transformação matricial T induzida pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$. Então, a transformação composta $T \circ S$ é

(a) um cisalhamento em y. `Alternativa correta.`

(b) uma rotação.

(c) uma reflexão.

(d) uma expansão em x.

(e) uma compressão em y.

Solução: Sejam A a matriz de S, B a matriz de T e C a matriz de $T \circ S$. Temos $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & \frac{1}{3}1 \end{bmatrix}$. Portanto $T \circ S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -5x+y \end{bmatrix}$, que é um cisalhamento em y.

Questão 12. Seja $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor 4, pode-se afirmar que a soma dos elementos na diagonal principal de A é

(a) 5 `Alternativa correta.`

(b) 3

(c) -2

(d) -5

(e) -4

Solução: Temos $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então temos $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Portanto $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Segue que $\mathrm{tr}(A) = 0 + 5 = 5$.

Questão 13. Se $(2,1)$ e $(1,2)$ são autovetores da matriz $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ associados aos autovalores -1 e 1, respectivamente, então a soma das quatro entradas de A é igual a

(a) 0 `Alternativa correta.`

(b) 3

(c) $-2/3$

(d) 5

(e) $-4/3$

Solução: Temos $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Portanto $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$. Segue que $a + b + c + d = -5 + 4 - 4 + 5 = 0$.

Questão 14. Considere o sistema de equações diferenciais $X' = AX$, em que A é a matriz que satisfaz $P^{-1}AP = D$, com

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ é a solução que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, então $x(1) + y(1) + z(1)$ é igual a

(a) $3e^2 + 6e^4$ `Alternativa correta.`

(b) $e^2 + 2e^4$

(c) $2e^2 + e^4$

(d) $4e^2 + 2e^4$

(e) $6e^2 + 3e^4$

Solução: Dos dados segue que 2 é autovalor de A associado aos autovalores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e 4 é autovalor de A associado ao autovalor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. A solução geral do sistema é então: $X(t) = ae^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + be^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + ce^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Além disso, $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2a + b + c \\ a + c \\ a + 2b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Resolvendo o sistema, obtemos $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$. Daí, a solução particular procurada é $X(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e então $x(1) + y(1) + z(1) = (e^2 + 2e^4) + (2e^4) + (2e^2 + 2e^4) = 3e^2 + 6e^4$.

Questão 15. Dadas transformações matriciais $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pode-se afirmar que

(a) se T e S são reflexões, então a transformação composta $S \circ T$ é uma rotação. `Alternativa correta.`

(b) se a matriz de T tem determinante 1, então a imagem, por T, do quadrado unitário é o quadrado unitário.

(c) se $T(1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $T(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, então T é uma isometria.

(d) se $T(1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $T(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, então T é uma projeção.

(e) se T é uma rotação e S é uma reflexão, então a transformação composta $S \circ T$ pode ser uma rotação.

Solução:
a) Como T e S são isometrias, então $S \circ T$ é isometria. Se A é a matriz de T e B é a matriz de S, então a matriz de $S \circ T$ é BA e $\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A) = (-1) \cdot (-1) = 1$. Segue que $S \circ T$ é rotação.
b) Falso, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é contra-exemplo.
c) A matriz de T é $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Daí, temos $T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}$. Como $\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \| \neq \| \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \|$, T não pode ser isometria.
d) Como $\det \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \neq 0$, T não pode ser projeção.
e) Se A é a matriz de T e B é a matriz de S, então a matriz de $S \circ T$ é BA e $\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A) = (-1) \cdot (1) = -1$. Portanto $S \circ T$ não pode ser rotação.

Questão 16. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável se, e somente se,

(a) $ab > 0$ ou $a = b = 0$ `Alternativa correta.`

(b) $ab \neq 0$

(c) $ab \geq 0$

(d) $ab > 0$

(e) $a \geq 0$ ou $b \geq 0$.

Solução: O polinômio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ é $c_A(x) = x^2 - ab$. Temos então:

I) Se $ab > 0$, existem duas raízes reais distintas e, portanto, A é diagonalizável.

II) Se $ab < 0$, não existem raízes reais e, portanto, A não tem autovalores (reais). Segue que A não é diagonalizável.

III) Se $a = b = 0$ então $A = 0$ já é diagonal.

IV) Se $a = 0$ e $b \neq 0$ ou $a \neq 0$ e $b = 0$, então 0 é o único autovalor de A. Como não existe um sistema de dois autovalore básicos (pois A não é nula), segue que A não é diagonalizável.