Em todas as questões desta prova, com exceção das questões 1, 15, 5, 6, 11, os sistemas de coordenadas em $\mathbf{E^3}$ considerados são da forma $\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{O}, \mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbf{V^3}$.

Q1. Suponha $\mathbf{V^3}$ orientado e sejam $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V^3}$. Considere as afirmações abaixo.

(I) $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z})$.
(II) Se $\vec{x}$ é ortogonal a $\vec{y}$, então $[\vec{x} \wedge \vec{y}, \vec{y}, \vec{x}] = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$.
(III) $[(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{x}, (\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{y}, 2\vec{x} - \vec{y}] = 0$.

Então, pode-se afirmar que

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(d) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Q2. Considere a reta $r : 2x + 4 = y - 1 = z + 2$ e o ponto $P = (1, 1, 1)$. Se $Q = (a, b, c)$ é o ponto simétrico de P em relação à reta r, então $a + b + c$ é igual a

(a) 1.
(b) -2.
(c) 2.
(d) -1.
(e) -3.

Q3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere o plano

$$\pi : ax + by + z = 0$$

e a reta

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = b - \lambda \end{cases}$$

Se a distância entre r e π é igual a $\sqrt{3}$, então $a + b^2$ é igual a

(a) 5.
(b) 3.
(c) 7.
(d) 4.
(e) 6.

Q4. Considere o plano π que passa pelos pontos

$$A = (\alpha, 0, 0), \quad B = (0, \alpha, 0), \quad C = (0, 0, \alpha),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Então, a distância da origem $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$ até o plano π é igual a $\sqrt{6}$ se, e somente se,

(a) $\alpha = 3\sqrt{2}$ ou $\alpha = -3\sqrt{2}$.
(b) $\alpha = 2\sqrt{2}$ ou $\alpha = -2\sqrt{2}$.
(c) $\alpha = 3\sqrt{3}$ ou $\alpha = -3\sqrt{3}$.
(d) $\alpha = 2\sqrt{3}$ ou $\alpha = -2\sqrt{3}$.
(e) $\alpha = 3\sqrt{6}$ ou $\alpha = -3\sqrt{6}$.

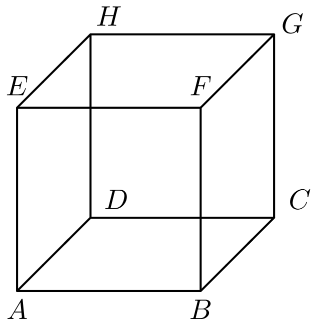
Q5. Sejam $m, n, p \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x + 2z = n \\ -2x + y - z = p \\ -x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

Pode-se, então, afirmar que este sistema tem uma única solução se, e somente se, $2m - n + p$ é igual a

(a) 5/2.
(b) 5.
(c) 6.
(d) 3/2.
(e) 10.

Q6. Considere o cubo $ABCDEFGH$ ilustrado na figura abaixo:



Sejam $\Sigma = (H, \mathcal{E})$ e $\Sigma' = (D, \mathcal{F})$ sistemas de coordenadas em que

$$\mathcal{E} = \{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BF}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = \{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{GC}\}.$$

Se um ponto de $\mathbf{E^3}$ tem coordenadas $(3, -1, 1)$ no sistema Σ, então suas coordenadas no sistema Σ' são

(a) $(2, -1, 1)$.
(b) $(1, 2, -1)$.
(c) $(-1, 2, 1)$.
(d) $(1, -2, 1)$.
(e) $(-1, 2, 2)$.

Q7. Considere a reta $r : 2x = y = 2z$ e o plano $\pi : x - y - z + 2 = 0$. A reta s tem equação vetorial $s : X = (0, 0, 0) + \lambda\vec{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, com $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{14}$. Se a reta s é ortogonal à reta r e é paralela ao plano π, então $a + b + c$ é igual a

(a) 2 ou -2.
(b) 1 ou -1.
(c) 4 ou -4.
(d) 3 ou -3.
(e) 0.

Q8. Seja π o plano que contém as retas

$$r : X = (1,2,1) + \lambda(1,0,1) \ (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad s : X = (1,2,1) + \lambda(0,1,1) \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) π é paralelo ao plano $x + y - z + 2 = 0$.
(II) π contém a reta $X = (2,1,1) + \lambda(1,1,2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
(III) A reta $X = (1,1,1) + \lambda(-2,4,2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ é transversal a π.

Pode-se, então, afirmar que

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(d) todas as afirmações são verdadeiras.
(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q9. Considere as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Então, a distância entre as retas r e s é igual a

(a) 2.
(b) 6.
(c) 1/3.
(d) 3.
(e) 2/3.

Q10. Seja $m \in \mathbb{R}$ e considere as retas

$$r : X = (1, m, 1) + \lambda(-1, 0, 1) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sabendo que as retas r e s se encontram no ponto $P = (a, b, c)$, pode-se afirmar que

(a) $m = 3$ e $a + b + c = 5$.

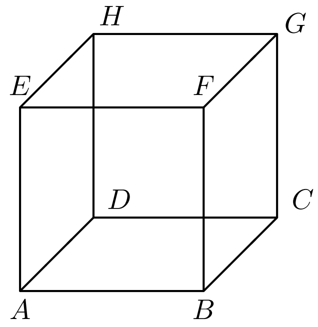
(b) m pode ser qualquer número real e $a + b + c = 5$.

(c) $m = 3$ e $a + b + c = 1$.

(d) $m = 1$ e $a + b + c = 5$.

(e) $m = 1$ e $a + b + c = 1$.

Q11. Considere o cubo $ABCDEFGH$ de aresta unitária ilustrado na figura abaixo:



Se P é um ponto de $\mathbf{E^3}$ tal que $\overrightarrow{HP} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HE} + 2\overrightarrow{AG}$, então o volume do tetraedro determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{HP}$ é igual a

(a) 1/6.
(b) 1/2.
(c) 3/2.
(d) 1/3.
(e) 2/3.

Q12. Considere os seguintes pontos de $\mathbf{E^3}$:

$$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,1), \quad C = (1,2,1), \quad D = (0,1,0).$$

Seja π o plano determinado por B, C, D. Se E é o ponto simétrico de A com relação ao plano π, então as coordenadas de E são

(a) $(-2,3,0)$.
(b) $(-1,2,0)$.
(c) $(4,-3,0)$.
(d) $(2,-1,0)$.
(e) $(3,-2,0)$.

Q13. Considere as retas

$$r : \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -2x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Considere os vetores $\vec{z} = (7,6,-4)$ e $\vec{w} = (a,b,c)$. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V^3}$ tais que $\vec{u}$ é paralelo a r e $\vec{v}$ é paralelo a s. Se $\vec{w}$ é ortogonal às retas r e s e $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, então $a + b + c$ é igual a

(a) -2.
(b) 6.
(c) -6.
(d) 3.
(e) 2.

Q14. Considere os planos

$$\pi_1 : 2x - 3y + z - 7 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = -3 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

e a reta

$$r : \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = -7 + 6\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Pode-se, então, afirmar que

(a) π_1 é ortogonal a π_2 e r é paralela a π_1.

(b) π_1 é paralelo a π_2 e r não é paralela e nem ortogonal a π_1.

(c) π_1 é ortogonal a π_2 e r é ortogonal a π_1.

(d) π_1 é paralelo a π_2 e r é ortogonal a π_1.

(e) π_1 é paralelo a π_2 e r é paralela a π_1.

Q15. Suponha $\mathbf{V^3}$ orientado e sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V^3}$ tais que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja uma base positiva de $\mathbf{V^3}$. Suponha que $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 1, \|\vec{w}\| = 3$ e que a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja $2\pi/3$ radianos. Se $\vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então o produto misto $[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$ é igual a

(a) -3.

(b) $6\sqrt{3}$.

(c) 3.

(d) $3\sqrt{3}$.

(e) $-3\sqrt{3}$.

Q16. Os pontos da reta $r : X = (0, 1, -3) + \lambda(0, 1, 1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ que distam 2 da reta $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ são

(a) $(0, 6, 2)$ e $(0, -4, -8)$.
(b) $(0, 0, -4)$ e $(0, -1, -5)$.
(c) $(0, 2, -2)$ e $(0, -2, -6)$.
(d) $(0, 3, -1)$ e $(0, 4, 0)$.
(e) $(0, 5, 1)$ e $(0, -3, -7)$.