Álgebra Linear I - Poli - Prova 2
Gabarito

2014

Questão 1. Pela fórmula da projeção ortogonal,

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) = \frac{(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

$$= \frac{\|\vec{u}\|^2+0+\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|\cos(\pi/3)}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{\|\vec{u}\|^2+4\|\vec{u}\|^2\frac{1}{2}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = 3\vec{u},$$

logo $\lambda = 3$.

Questão 2. Como

$$\mathrm{proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|w\|^2}\vec{w} = \frac{a-b+c}{1^2+(-1)^2+1^2}\vec{w} = \frac{a-b+c}{3}\vec{w},$$

se $\mathrm{proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \vec{w}$ deduzimos $\frac{a-b+c}{3} = 1$, logo

$$a-b+c = 3.$$

Questão 3. Observa que um vetor diretor da reta (AB) é $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,-2,-1)$. Logo uma equação vetorial da reta é

$$X = A + t\vec{u} = (1,2,0) + t(1,-2,-1)$$

e como D pertence a (AB),

$$D = (1+t, 2-2t, -t)$$

para algum t. Além disso $\overrightarrow{CD}$ é ortogonal à reta (AB), ou seja $\overrightarrow{CD}\cdot\vec{u} = 0$. Como

$$\overrightarrow{CD} = (t-1, 1-2t, -t-2)$$

deduzimos

$$(t-1) - 2(1-2t) - (-t-2) = 0$$

logo $6t-1=0$ e $t = 1/6$. Logo

$$D = (7/6, 10/6, -1/6)$$

e a soma das coordenadas de D vale $16/6 = 8/3$.

Questão 4. Como $\overrightarrow{CA} = (1, 1, -3), \overrightarrow{CB} = (2, 0, -2), \overrightarrow{CD} = (-2, 0, -4)$, o produto misto $[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}]$ vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 12$$

O volume do tetraedro é

$$V = \frac{1}{6}|12| = 2.$$

Questão 5. O volume vale $V = |[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = |(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}|$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano de equação $x - y + z = 0$, um vetor normal ao plano que contém A, B, C é $(1, -1, 1)$. Segue que $\vec{u} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$ também é paralelo ao vetor $(1, -1, 1)$. Logo o ângulo ϕ entre $\vec{u}$ e $\overrightarrow{BD}$ é $\pi/3$ (se $\vec{u}$ e $(1, -1, 1)$ têm mesmo sentido) ou $2\pi/3$ (se têm sentidos opostos).

Logo

$$V = |\vec{u} \cdot \overrightarrow{BD}| = \|\vec{u}\| \|\overrightarrow{BD}\| | \cos \phi| = \frac{1}{2} \|\vec{u}\|.$$

Como

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\| \mathrm{sen}(\pi/3) = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

temos que $V = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Questão 6. (I) falso:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}\, \vec{w}] = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w} = -\vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

ou aplicar a regra dos 3 dedos e ver que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é positiva então $\{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$ é negativa.

(II) falso:

$$(\vec{w} - 4\vec{v}) \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{u} - 4\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{w} + 4\vec{u} \wedge \vec{v} = -2\vec{t} + 4\vec{t} = 2\vec{t}$$

(III) falso: a fórmula correta é

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

Questão 7. Calcula-se

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0),$$

e como $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 2)$, tem-se

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|^2} \overrightarrow{AD} = \frac{(-2, -1, -1) \cdot (2, 1, 2)}{9} (2, 1, 2) = -\frac{7}{9}(2, 1, 2).$$

Logo a área do triângulo de vértices A, B, C vale

$$a = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{7}{18} \|(1, 1, 0) \wedge (2, 1, 2)\| = \frac{7}{18} \|(2, -2, 1)\| = \frac{7}{18} 3 = \frac{7}{6}.$$

Questão 8. (I) falso: se $\vec{u} = 2\vec{v} + 2\vec{w}$ então $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, logo os três vetores são coplanares e o produto misto deve valer 0.

(II) verdadeiro: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$. Como $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, ele é paralelo a $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ou seja faz um ângulo ϕ de 0 ou π com ele; logo o produto scalar $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ deles vale

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\phi) = \pm \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais (fazem um ângulo $\theta = \pi/2$),

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \mathrm{sen}\theta = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Logo

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

(III) verdadeiro: propriedade clássica do produto misto ou do determinante quando troca-se colunas.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}].$$

Questão 9. O vetor diretor da primeira reta é: $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\alpha \\ -\alpha-1 \end{pmatrix}$.

O vetor diretor da segunda reta é: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\beta \\ -1+\beta \\ 3 \end{pmatrix}$.

As retas são ortogonais se, e somente se, os vetores diretores das retas são ortogonais. Logo se, e somente se, $0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\alpha \\ -\alpha-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2-\beta \\ -1+\beta \\ 3 \end{pmatrix} = -4-2\beta-1+\beta+\alpha-\alpha\beta-3\alpha-3 = -8-\beta-2\alpha-\alpha\beta.$

Questão 10. O vetor diretor da reta r é: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

O vetor normal do plano π é: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A reta é paralela ao plano se, e somente se, $\vec{d}$ e $\vec{n}$ são ortogonais. Mas isso é verdade pois $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$.

Para decidir se r está contida em π. Escolhemos um ponto qualquer de r. Por exemplo, o ponto $P(6, 0, -2)$ (que foi obtido fazendo $y = 0$ nas equações que definem r e resolvendo o sistema em x e y).

O ponto P não é de π, pois as coordenadas de P não satisfazem $x - 3y - z = 1$. De fato $6 - 3 \cdot 0 - (-2) \neq 1$.

Questão 11. (I) Falso. $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{n}] = 0$, é equivalente a $[\vec{n}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$. Como $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ é o vetor normal de π, temos que de fato a condição $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{n}] = 0$ diz que os planos π e π' são perpendiculares.

(II) Verdadeiro. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são dois vetores não colineares e paralelos ao plano π. Logo $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$ é um vetor normal de π. Como é normal a $\vec{n}$, temos que os planos π e π' são paralelos. A condição

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$ quer dizer que os vetores $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são coplanares, logo D, um ponto de π' está em π. Assim π e π' são planos paralelos com um ponto em comum. Portanto são o mesmo plano.

(III) Verdadeiro. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ é um vetor normal ao plano π. Dois planos são paralelos se, e somente se, os vetores normais são paralelos. E são perpendiculares se, e somente se, os vetores normais são ortogonais. Como o ângulo entre os vetores normais é 45 graus, temos que os planos não são nem paralelos nem perpendiculares.

Questão 12. O vetor diretor da reta procurada é paralelo ao vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Logo as únicas três alternativas são as retas com um vetor diretor paralelo a esse, isto é (a), (d), (e). Falta provar qual dessas retas contém o ponto $P(1, 2, -1)$.

A reta (d) não contém o ponto P pois o sistema $1 = 4 + t$, $-1 = 3 + t$ é incompatível.

A reta (e) não contém o ponto P pois o sistema $1 = 4 - 3t$, $-1 = 2 - 3t$ é incompatível.

A reta (a) contém o ponto $P(1, 2, -1)$ como se comprova para $t = 1$.

Questão 13. O vetor diretor de r é $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-5 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. O vetor normal do plano π é $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

O vetor diretor da reta procurada é ortogonal a $\vec{n}$, pois está contida em π, e é ortogonal a $\vec{d}$, pois é perpendicular a r. Assim o vetor diretor da reta procurada é $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Como a reta procurada passa pelo ponto $(1, 3, 1)$, temos que uma equação vetorial da reta é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Para $t = 2$ obtemos que o ponto $(-3, 1, -9)$ pertence a essa reta.

Questão 14. Como a reta está contida em π, temos que o vetor diretor da reta $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ é ortogonal ao vetor normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a+3 \\ -2 \\ -(1+a) \end{pmatrix}$ de π. Portanto $0 = \vec{d} \cdot \vec{n} = a + 3 + 2 - 3 - 3a = 2 - 2a$. Logo $a = 1$.

Como a reta está contida em π, temos que $(a+3)(3+\lambda) - 2(-\lambda) - (1+a)(5+3\lambda) = b$. Usando que $a = 1$, obtemos que $b = 2$. Assim temos que $a^2 + b^2 = 5$.

Questão 15. O vetor diretor da primeira reta (vamos chamar ela de r) é: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

O vetor diretor da segunda reta (vamos chamar ela de s) é: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vemos que $\vec{e} = \frac{3}{2}\vec{d}$. Logo os vetores diretores são paralelos, e portanto as retas são paralelas.

A distância de r a s então é a distância de um ponto de s à reta r. Seja $P(-1, 6, 0)$ um ponto de s (obtido fazendo $z = 0$ e resolvendo o sistema em x e y). Consideremos os pontos $A(-2, 4, 2)$ e $(2, 0, 0)$ de r. Então

$$d(r, s) = d(r, P) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}. \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$d(r, s) = d(r, P) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{12^2 + 12^2 + 12 \cdot 3}}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 4}} = \frac{\sqrt{12 \cdot 3 \cdot 9}}{\sqrt{4 \cdot 9}} = 3.$$

Questão 16. Dado um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, a equação geral do plano que passa por P e que tem vetor normal $\vec{n}$ é $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

O vetor normal do plano é $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

A equação geral do plano π é : $x - 1 - 2(y + 2) - 3(z - 1) = 0$. Logo $x - 2y - 3z - 2 = 0$.

Agora podemos aplicar a fórmula $d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ para a distância de um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ a um plano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$. Assim, a distância pedida do ponto ao plano é $\frac{|1 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}}$.