MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 12.
- ■ 8.
- C 9.
- D 5.
- E 6.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema admite exatamente duas soluções.
- [redacted] O problema admite infinitas soluções.
- $\boxed{\text{C}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- $\boxed{\text{D}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- $\boxed{\text{E}}$ O problema nao admite solução.

Questão 6 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [redacted] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 7 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- [C] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [E] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 8 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- [B] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- [C] $y(2) = 16$.
- [D] $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

Questão 9 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 11 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\dfrac{1}{4}$.

B $-\dfrac{1}{8}$.

C 2.

D $\dfrac{1}{8}$.

E $\dfrac{1}{4}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são falsas.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 3 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

$\boxed{\text{B}}$ $y(2) = 16$.

$\boxed{\text{C}}$ $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

$\boxed{\text{D}}$ $y(2) = 4$.

$\boxed{\text{E}}$ $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 4 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{B}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

$\boxed{\text{C}}$ $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

$\boxed{\text{D}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{E}}$ $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

$\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{B}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

$\boxed{\text{C}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

$\boxed{\text{E}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 6 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- ■ 8.
- B 6.
- C 9.
- D 5.
- E 12.

Questão 7 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A 2.
- B $-\frac{1}{8}$.
- C $\frac{1}{8}$.
- D $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- B $y' = e^{3y/2} + 150$.
- C $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- E $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 9 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema admite exatamente duas soluções.
- B O problema admite exatamente uma solução.
- C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- D O problema nao admite solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 10 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- B $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- C $y' = e^{3y/2} + 150$.
- D $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema admite exatamente duas soluções.
- B O problema nao admite solução.
- C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- D O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{8}$.
- B 2.
- C $-\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- E $\frac{1}{4}$.

Questão 6 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = \frac{15}{4}$.

[B] $y(2) = \frac{9}{2}$.

[C] $y(2) = 4$.

[D] $y(2) = 16$.

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [B] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [C] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- [D] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 10 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

■ 8.
[B] 6.
[C] 12.
[D] 5.
[E] 9.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.
[B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[C] Todas as afirmações são verdadeiras.
[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ____________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 5.

B 9.

C 6.

[redacted] 8.

E 12.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 4 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[B] Todas as afirmações são falsas.

[C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

■ O problema admite infinitas soluções.
B O problema admite exatamente duas soluções.
C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
D O problema admite exatamente uma solução.
E O problema nao admite solução.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
D Todas as afirmações são falsas.
E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 7 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = e^{3y/2} + 150$.

B $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

C $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

[redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

E $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[redacted] Todas as afirmações são falsas.

B Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 9 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[redacted] $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

B $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

C $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

D $y(2) = 16$.

E $y(2) = 4$.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- C $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- D $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 11 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{4}$.
- B 2.
- C $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- E $-\frac{1}{8}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- B O problema admite exatamente duas soluções.
- C O problema admite exatamente uma solução.
- D O problema nao admite solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 3 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

D $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 7 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

B $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150).$

C $y' = e^{3y/2} + 150.$

D $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150).$

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\dfrac{1}{8}.$

B $\dfrac{1}{8}.$

■ $-\dfrac{1}{4}.$

D $2.$

E $\dfrac{1}{4}.$

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 6.

B 5.

■ 8.

D 12.

E 9.

Questão 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

■ Todas as afirmações são falsas.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 4$.

B $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

C $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

D $y(2) = 16$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Todas as afirmações são falsas.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 4$.
- [B] $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [D] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- [E] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- $\boxed{\text{B}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- $\boxed{\text{C}}$ O problema admite exatamente duas soluções.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- $\boxed{\text{E}}$ O problema nao admite solução.

Questão 7 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- $\boxed{\text{A}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- $\boxed{\text{C}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- $\boxed{\text{D}}$ $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- $\boxed{\text{E}}$ $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 8 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[B] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
■ Todas as afirmações são verdadeiras.
[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[D] Todas as afirmações são falsas.
[E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 10 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 6.
- ■ 8.
- [C] 5.
- [D] 12.
- [E] 9.

Questão 11 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 2.
- [B] $-\frac{1}{8}$.
- [C] $\frac{1}{4}$.
- [D] $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** __________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- ■ O problema admite infinitas soluções.
- B O problema nao admite solução.
- C O problema admite exatamente duas soluções.
- D O problema admite exatamente uma solução.
- E Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 3 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\frac{1}{8}$.

B $\frac{1}{4}$.

■ $-\frac{1}{4}$.

D $\frac{1}{8}$.

E 2.

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 6 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 6.
- [C] 12.
- ■ 8.
- [E] 9.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [C] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [D] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 9 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 4$.
- [B] $y(2) = 16$.
- [C] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [E] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

D Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = t^2\left[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.

B $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

C $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

■ $y_p = t\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = t^2\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[B] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

[C] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

[D] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

[E] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

■ 8.

[B] 6.

[C] 5.

[D] 9.

[E] 12.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[B] Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = 4$.
- B $y(2) = \frac{15}{4}$.
- C $y(2) = \frac{9}{2}$.
- D $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema nao admite solução.
- B Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- C O problema admite exatamente duas soluções.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- E O problema admite exatamente uma solução.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $-\frac{1}{8}$.
- B $\frac{1}{8}$.
- C $\frac{1}{4}$.
- D 2.
- ■ $-\frac{1}{4}$.

Questão 7 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B Todas as afirmações são falsas.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 10 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- [B] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- [E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.

2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .

3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.

4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.

5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.

6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.

7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.

8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- [B] $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [D] $y(2) = 16$.
- [E] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] O problema admite exatamente uma solução.
- [B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- [C] O problema admite exatamente duas soluções.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [E] O problema nao admite solução.

Questão 3 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 2.
- [B] $\dfrac{1}{4}$.
- [C] $-\dfrac{1}{8}$.
- [D] $\dfrac{1}{8}$.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.

Questão 4 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 12.
B 5.
C 6.
[redacted] 8.
E 9.

Questão 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[redacted] Todas as afirmações são falsas.
C Todas as afirmações são verdadeiras.
D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

$\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são falsas.

$\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

$\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{E}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

$\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{B}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

$\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são falsas.

$\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = e^{3y/2} + 150$.
- B $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- D $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- E $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- E $y_p = t^2\left[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.

Questão 10 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[D] Todas as afirmações são falsas.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [B] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [C] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [E] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 4 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- $\boxed{\text{C}}$ O problema admite exatamente duas soluções.
- $\boxed{\text{D}}$ O problema nao admite solução.
- $\boxed{\text{E}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{E}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\dfrac{1}{8}$.

B $\dfrac{1}{4}$.

C $\dfrac{1}{8}$.

■ $-\dfrac{1}{4}$.

E 2.

Questão 9 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 16$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

C $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

D $y(2) = 4$.

E $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 10 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 12.
- [B] 6.
- ■ 8.
- [D] 5.
- [E] 9.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [B] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [E] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- B 9.
- C 6.
- D 12.
- ■ 8.

Questão 2 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- B $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- C $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- E $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- A Todas as afirmações são verdadeiras.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

$\boxed{\text{A}}$ O problema nao admite solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

$\boxed{\text{C}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

$\boxed{\text{D}}$ O problema admite exatamente duas soluções.

$\boxed{\text{E}}$ O problema admite exatamente uma solução.

Questão 5 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

$\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{E}}$ Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 6 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- [C] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [D] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 8 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 4$.
- [B] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- [C] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [E] $y(2) = 16$.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 11 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $\frac{1}{4}$.

B $-\frac{1}{8}$.

C 2.

D $\frac{1}{8}$.

■ $-\frac{1}{4}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 2 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = 16$.
- B $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- D $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- E $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 4 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $\frac{1}{4}$.

B $-\frac{1}{8}$.

■ $-\frac{1}{4}$.

D $\frac{1}{8}$.

E 2.

Questão 6 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

C $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 7 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 6.

B 9.

■ 8.

D 12.

E 5.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são falsas.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema nao admite solução.
- B O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- D Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- E O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 10 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{A}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{B}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

$\boxed{C}$ Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

$\boxed{E}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

$\boxed{A}$ $y' = e^{3y/2} + 150$.

$\boxed{B}$ $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

$\boxed{C}$ $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

$\boxed{E}$ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ____ **NUSP:** __________________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.

[B] Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 3 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] Todas as afirmações são falsas.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 4 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 7 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema nao admite solução.
- B Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- C O problema admite exatamente duas soluções.
- D O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 8 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- B $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- C $y(2) = 16$.
- D $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 6.
- B 9.
- C 12.
- ■ 8.
- E 5.

Questão 10 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\frac{1}{4}$.

B $-\frac{1}{8}$.

C $\frac{1}{8}$.

D 2.

E $\frac{1}{4}$.

Questão 11 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

B $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

C $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são falsas.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente duas soluções.

B O problema admite exatamente uma solução.

C O problema nao admite solução.

[redacted] O problema admite infinitas soluções.

E Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 3 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = 16$.
- B $y(2) = \frac{9}{2}$.
- C $y(2) = \frac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- E $y(2) = 4$.

Questão 4 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \frac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \frac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 5 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- B 12.
- ■ 8.
- D 9.
- E 6.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{4}$.
- B 2.
- C $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- E $-\frac{1}{8}$.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são verdadeiras.
- E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Todas as afirmações são verdadeiras.

[B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

[B] $y' = e^{3y/2} + 150$.

[C] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.

[D] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 10 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[B] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[C] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

[D] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

[E] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- ■ O problema admite infinitas soluções.
- B Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- C O problema admite exatamente duas soluções.
- D O problema nao admite solução.
- E O problema admite exatamente uma solução.

Questão 2 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- ■ $-\frac{1}{4}$.
- B 2.
- C $\frac{1}{8}$.
- D $-\frac{1}{8}$.
- E $\frac{1}{4}$.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = \frac{15}{4}$.
- B $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- D $y(2) = \frac{9}{2}$.
- E $y(2) = 4$.

Questão 5 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

■ Todas as afirmações são falsas.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[D] Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- D $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- E $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 10 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- B 12.
- C 9.
- D 6.
- ■ 8.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = \frac{3y}{2} + 150.$
- B $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150).$
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$
- D $y' = e^{3y/2} + 150.$
- E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150).$

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ________________________________ **NUSP:** ________________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[■] Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

[A] O problema nao admite solução.

[■] O problema admite infinitas soluções.

[C] O problema admite exatamente uma solução.

[D] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

[E] O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 3 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 4$.
- [B] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [D] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- [E] $y(2) = 16$.

Questão 4 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [B] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [C] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [D] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [E] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 6 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [B] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [C] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [D] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são falsas.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 12.
- [B] 5.
- [C] 9.
- [D] 6.
- ■ 8.

Questão 10 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [B] $-\frac{1}{8}$.
- [C] $\frac{1}{8}$.
- [D] 2.
- [E] $\frac{1}{4}$.

Questão 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.

2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .

3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.

4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.

5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.

6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.

7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.

8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- [E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 9.
- [C] 12.
- ■ 8.
- [E] 6.

Questão 3 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- [B] 2.
- [C] $-\dfrac{1}{8}$.
- [D] $\dfrac{1}{4}$.
- [E] $\dfrac{1}{8}$.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3} y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[B] Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

[A] O problema admite exatamente uma solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

[C] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2} e^{-\pi}$.

[D] O problema admite exatamente duas soluções.

[E] O problema nao admite solução.

Questão 6 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Todas as afirmações são falsas.
- B Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 7 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- C $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 8 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{A}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{B}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

$\boxed{C}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{D}$ Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

$\boxed{A}$ Todas as afirmações são falsas.

$\boxed{B}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{D}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{E}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 11 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- [B] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- [C] $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [E] $y(2) = 4$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ________________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema nao admite solução.
- B O problema admite exatamente duas soluções.
- C O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- E Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 2 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = e^{3y/2} + 150$.
- B $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- D $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- E $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

B Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

B $y(2) = \frac{9}{2}$.

C $y(2) = 4$.

D $y(2) = 16$.

E $y(2) = \frac{15}{4}$.

Questão 5 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 6.
- ■ 8.
- [D] 12.
- [E] 9.

Questão 6 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 7 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\frac{1}{4}$.

[B] $\frac{1}{4}$.

[C] 2.

[D] $\frac{1}{8}$.

[E] $-\frac{1}{8}$.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3} y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

B $y_p = t^2 \big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

C $y_p = t^2 \big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

B $y(2) = \frac{15}{4}$.

C $y(2) = 4$.

D $y(2) = 16$.

E $y(2) = \frac{9}{2}$.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente duas soluções.

■ O problema admite infinitas soluções.

C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

D O problema admite exatamente uma solução.

E O problema nao admite solução.

Questão 3 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são falsas.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 5 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

B $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

C $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 9 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\frac{1}{4}$.

B 2.

C $\frac{1}{4}$.

D $-\frac{1}{8}$.

E $\frac{1}{8}$.

Questão 10 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = e^{3y/2} + 150$.

B $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

D $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

E $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.

Questão 11 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 9.

B 12.

C 5.

D 6.

■ 8.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ________________________________ **NUSP:** ________________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- C $y(2) = 4$.
- D $y(2) = \frac{9}{2}$.
- E $y(2) = \frac{15}{4}$.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \frac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \frac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- C $y' = e^{3y/2} + 150$.
- D $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3} y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

$\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

$\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{D}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

$\boxed{\text{A}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2} e^{-\pi}$.

$\boxed{\text{B}}$ O problema nao admite solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

$\boxed{\text{D}}$ O problema admite exatamente uma solução.

$\boxed{\text{E}}$ O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 6 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

$\boxed{\text{A}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{B}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

$\boxed{\text{C}}$ $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

$\boxed{\text{D}}$ $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 7 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

C Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\frac{1}{8}$.

B $\frac{1}{8}$.

C 2.

■ $-\frac{1}{4}$.

E $\frac{1}{4}$.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 10 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 6.
- [B] 9.
- [C] 12.
- ■ 8.
- [E] 5.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
D Todas as afirmações são falsas.
E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
B Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.
E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 9.
B 12.
C 5.
D 6.
■ 8.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
■ Todas as afirmações são falsas.
C Todas as afirmações são verdadeiras.
D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 16$.
B $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
C $y(2) = 4$.
■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
E $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- $\boxed{\text{B}}$ O problema admite exatamente duas soluções.
- $\boxed{\text{C}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- $\boxed{\text{D}}$ O problema nao admite solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
D Todas as afirmações são falsas.
E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = e^{3y/2} + 150$.
[redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
C $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
D $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
E $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [B] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [C] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [E] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 11 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- [B] $-\dfrac{1}{8}$.
- [C] $\dfrac{1}{4}$.
- [D] 2.
- [E] $\dfrac{1}{8}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- [redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- C $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- D $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- E $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema nao admite solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

C O problema admite exatamente uma solução.

D Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

E O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 5 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- C $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- D $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 6 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = 4$.
- B $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- C $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- E $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 12.
- [C] 9.
- [D] 6.
- ■ 8.

Questão 10 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 11 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\frac{1}{8}$.

B $\frac{1}{8}$.

C 2.

D $\frac{1}{4}$.

■ $-\frac{1}{4}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

[A] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

[B] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[D] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[E] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [D] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 4 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [C] $y(2) = 4$.
- [D] $y(2) = 16$.
- [E] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 2.
- [B] $-\dfrac{1}{8}$.
- [C] $\dfrac{1}{8}$.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- [E] $\dfrac{1}{4}$.

Questão 6 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[D] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 7 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

[C] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$

[D] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$

[E] $y' = e^{3y/2} + 150.$

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são falsas.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- ■ 8.
- B 6.
- C 5.
- D 9.
- E 12.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[B] Todas as afirmações são falsas.
[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[D] Todas as afirmações são verdadeiras.
[E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 11 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

■ O problema admite infinitas soluções.
[B] O problema admite exatamente uma solução.
[C] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
[D] O problema nao admite solução.
[E] O problema admite exatamente duas soluções.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema nao admite solução.
- B O problema admite exatamente duas soluções.
- C O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- E Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 3 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [B] $y_p = t^2\left[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.
- [C] $y_p = t^2\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- [D] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- ■ $y_p = t\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 4 Considere a equação diferencial linear

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 6.
- [B] 5.
- ■ 8.
- [D] 12.
- [E] 9.

Questão 5 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

[A] $-\dfrac{1}{8}$.

■ $-\dfrac{1}{4}$.

[C] $\dfrac{1}{8}$.

[D] $\dfrac{1}{4}$.

[E] 2.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

[B] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

[C] $y(2) = 4$.

[D] $y(2) = 16$.

[E] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 10 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = e^{3y/2} + 150.$
- [B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150).$
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$
- [D] $y' = \frac{3y}{2} + 150.$
- [E] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150).$

Questão 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B C D ■

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.

2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .

3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.

4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.

5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.

6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.

7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.

8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[redacted] 8.
B 5.
C 12.
D 6.
E 9.

Questão 2 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
B Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são falsas.
- D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 4 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 6 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.

[B] $y' = e^{3y/2} + 150$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

[D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

[E] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 7 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

[A] $-\dfrac{1}{8}$.

[B] 2.

[C] $\dfrac{1}{8}$.

■ $-\dfrac{1}{4}$.

[E] $\dfrac{1}{4}$.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[D] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são falsas.

[D] Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 10 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

B O problema admite exatamente duas soluções.

■ O problema admite infinitas soluções.

D O problema admite exatamente uma solução.

E O problema nao admite solução.

Questão 11 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

B $y(2) = 16$.

C $y(2) = 4$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

E $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.

2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .

3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.

4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.

5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.

6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.

7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.

8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [D] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 3 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema nao admite solução.
- $\boxed{\text{B}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- $\boxed{\text{C}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- $\boxed{\text{E}}$ O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 4 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 5 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
B Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
E Todas as afirmações são falsas.

Questão 6 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 6.
B 12.
C 5.
D 9.
■ 8.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 16$.
B $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
C $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
E $y(2) = 4$.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Todas as afirmações são falsas.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

B $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

C $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 10 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\frac{1}{4}$.

B $\frac{1}{4}$.

C $-\frac{1}{8}$.

D 2.

E $\frac{1}{8}$.

Questão 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

■ Todas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 16$.
- [B] $y(2) = 4$.
- [C] $y(2) = \frac{15}{4}$.
- [D] $y(2) = \frac{9}{2}$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \frac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \frac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema admite exatamente duas soluções.
- $\boxed{\text{B}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- $\boxed{\text{D}}$ O problema nao admite solução.
- $\boxed{\text{E}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 5 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- $\boxed{\text{A}}$ $y_p = t^2\left[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.
- $\boxed{\text{B}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- $\boxed{\text{C}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- $\boxed{\text{E}}$ $y_p = t^2\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 6 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 7 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

C $y' = e^{3y/2} + 150$.

D $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

E $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- C $-\frac{1}{8}$.
- D $\frac{1}{8}$.
- E 2.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- ■ 8.
- C 9.
- D 6.
- E 12.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- B 9.
- C 12.
- ■ 8.
- E 6.

Questão 2 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- C Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

$\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

$\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{E}}$ Todas as afirmações são falsas.

Questão 4 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

[redacted] $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{B}}$ $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

$\boxed{\text{C}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

$\boxed{\text{D}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{E}}$ $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [C] O problema admite exatamente duas soluções.
- [D] O problema admite exatamente uma solução.
- [E] O problema nao admite solução.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\dfrac{1}{4}$.
- [B] 2.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- [D] $-\dfrac{1}{8}$.
- [E] $\dfrac{1}{8}$.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [C] $y(2) = 16$.
- [D] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- [E] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- [B] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [C] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 11 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 16$.
- [B] $y(2) = \frac{9}{2}$.
- [C] $y(2) = 4$.
- [D] $y(2) = \frac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \frac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \frac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 3 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $-\frac{1}{8}$.
- [B] 2.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [D] $\frac{1}{4}$.
- [E] $\frac{1}{8}$.

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são falsas.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[redacted] Todas as afirmações são falsas.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 7 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente duas soluções.

[redacted] O problema admite infinitas soluções.

C O problema nao admite solução.

D Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

E O problema admite exatamente uma solução.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = e^{3y/2} + 150.$

[redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

C $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150).$

D $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150).$

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [B] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [C] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [E] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 10 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- $\boxed{\text{A}}$ 9.
- $\boxed{\text{B}}$ 5.
- ■ 8.
- $\boxed{\text{D}}$ 12.
- $\boxed{\text{E}}$ 6.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- $\boxed{\text{A}}$ $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $y(2) = 4$.
- $\boxed{\text{E}}$ $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- $\boxed{\text{A}}$ 9.
- $\boxed{\text{B}}$ 5.
- $\boxed{\text{C}}$ 12.
- $\boxed{\text{D}}$ 6.
- ■ 8.

Questão 3 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 4 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 2.

[B] $-\frac{1}{8}$.

■ $-\frac{1}{4}$.

[D] $\frac{1}{8}$.

[E] $\frac{1}{4}$.

Questão 5 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são falsas.

[redacted] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 7 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = t^2 \big[P(t) \cos(bt) + Q(t) \operatorname{sen}(bt) \big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- B $y_p = P(t) \cos(bt) + Q(t) \operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- C $y_p = t^2 \big[P \cos(bt) + Q \operatorname{sen}(bt) \big]$, onde P e Q são constantes.
- D $y_p = tP(t) \cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [redacted] $y_p = t \big[P(t) \cos(bt) + Q(t) \operatorname{sen}(bt) \big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são falsas.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3} y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 10 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2} e^{-\pi}$.

B O problema admite exatamente uma solução.

C O problema admite exatamente duas soluções.

D O problema nao admite solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

B $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

C $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

D $y' = e^{3y/2} + 150$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right) y + 150$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B C D ■

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 6.

B 12.

■ 8.

D 9.

E 5.

Questão 3 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [C] $y(2) = 16$.
- [D] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- [E] $y(2) = 4$.

Questão 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] O problema nao admite solução.
- [B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- [C] O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [E] O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[D] Todas as afirmações são falsas.
[E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
[D] Todas as afirmações são falsas.
[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 8 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

C $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

D $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 10 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 2.
- [B] $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [D] $-\frac{1}{8}$.
- [E] $\frac{1}{8}$.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- [E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $-\frac{1}{8}$.
- B $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- D $\frac{1}{8}$.
- E 2.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema admite exatamente uma solução.
- B Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- C O problema nao admite solução.
- D O problema admite exatamente duas soluções.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 4 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = e^{3y/2} + 150$.
- B $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- D $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 5 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- C $y_p = t^2\left[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.
- ■ $y_p = t\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- E $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 8 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.
B Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
D Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
B Todas as afirmações são verdadeiras.
C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
D Todas as afirmações são falsas.
E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = 16$.
- B $y(2) = \frac{9}{2}$.
- C $y(2) = \frac{15}{4}$.
- D $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 11 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- ■ 8.
- C 12.
- D 6.
- E 9.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] O problema admite exatamente duas soluções.
- [B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [D] O problema nao admite solução.
- [E] O problema admite exatamente uma solução.

Questão 2 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [C] $-\frac{1}{8}$.
- [D] $\frac{1}{8}$.
- [E] 2.

Questão 3 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [B] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [C] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [D] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 4 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Todas as afirmações são falsas.
■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
[D] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
[B] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
[C] $y(2) = 16$.
[D] $y(2) = 4$.
[E] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 6 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
[B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
[C] $y' = e^{3y/2} + 150$.
[D] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
[E] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 7 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[redacted] Todas as afirmações são falsas.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

■ 8.
[B] 6.
[C] 9.
[D] 5.
[E] 12.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[D] Todas as afirmações são falsas.
[E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [B] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [C] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [D] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [E] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 9.
- [C] 6.
- [D] 12.
- ■ 8.

Questão 3 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- [B] O problema admite exatamente duas soluções.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [D] O problema admite exatamente uma solução.
- [E] O problema nao admite solução.

Questão 4 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 6 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = \frac{15}{4}$.

B $y(2) = \frac{9}{2}$.

C $y(2) = 16$.

D $y(2) = 4$.

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\frac{1}{8}$.

B 2.

■ $-\frac{1}{4}$.

D $\frac{1}{4}$.

E $\frac{1}{8}$.

Questão 9 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[D] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 10 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

[B] $y' = e^{3y/2} + 150$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

[D] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

[E] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{B}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

B $y(2) = 16$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

D $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

E $y(2) = 4$.

Questão 2 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.

B $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

C $y' = e^{3y/2} + 150$.

[redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

E $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 4 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

B $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

C $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

[redacted] $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $-\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- C 2.
- D $\frac{1}{4}$.
- E $\frac{1}{8}$.

Questão 7 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- $\boxed{\text{B}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- $\boxed{\text{C}}$ O problema nao admite solução.
- $\boxed{\text{D}}$ O problema admite exatamente duas soluções.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- ■ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- $\boxed{\text{A}}$ 6.
- $\boxed{\text{B}}$ 12.
- ■ 8.
- $\boxed{\text{D}}$ 9.
- $\boxed{\text{E}}$ 5.

Questão 10 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C Todas as afirmações são falsas.
- D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ________________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = e^{3y/2} + 150.$
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$
- C $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$
- D $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$
- E $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

Questão 2 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\dfrac{1}{8}.$
- B $\dfrac{1}{4}.$
- C $2.$
- ■ $-\dfrac{1}{4}.$
- E $-\dfrac{1}{8}.$

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.

[B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

[B] $y(2) = 4$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

[D] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

[E] $y(2) = 16$.

Questão 5 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[B] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

[C] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[D] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

[E] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

[E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 7 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

[A] O problema admite exatamente uma solução.

[B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

[C] O problema nao admite solução.

[D] O problema admite exatamente duas soluções.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 8 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 12.

[B] 5.

[C] 9.

■ 8.

[E] 6.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 12.

B 9.

C 5.

D 6.

■ 8.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são falsas.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 5 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- B $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- D $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- E $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [redacted] O problema admite infinitas soluções.
- B O problema nao admite solução.
- C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- D O problema admite exatamente duas soluções.
- E O problema admite exatamente uma solução.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[D] Todas as afirmações são falsas.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

B $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

D $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

E $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 10 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $\frac{1}{8}$.

B $\frac{1}{4}$.

C 2.

D $-\frac{1}{8}$.

■ $-\frac{1}{4}$.

Questão 11 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 16$.

B $y(2) = 4$.

C $y(2) = \frac{15}{4}$.

D $y(2) = \frac{9}{2}$.

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ____________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 12.
- [C] 6.
- ■ 8.
- [E] 9.

Questão 3 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 4 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = e^{3y/2} + 150.$

B $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$

C $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$

[redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

E $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

Questão 5 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- C $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- D $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- E $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{8}$.
- B 2.
- C $-\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- E $\frac{1}{4}$.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \frac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \frac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 8 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

B $y(2) = 16$.

C $y(2) = 4$.

D $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

E $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 10 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente duas soluções.

B O problema nao admite solução.

C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

D O problema admite exatamente uma solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

$\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são falsas.

$\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

$\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{E}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

[redacted] $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

E $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [D] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [E] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.

Questão 4 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $-\dfrac{1}{8}$.
- [B] 2.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- [D] $\dfrac{1}{4}$.
- [E] $\dfrac{1}{8}$.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- [C] O problema admite exatamente uma solução.
- [D] O problema nao admite solução.
- [E] O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 6 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 9.
- ■ 8.
- [C] 6.
- [D] 12.
- [E] 5.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 8 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

[B] $y(2) = 16$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

[D] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

[E] $y(2) = 4$.

Questão 9 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

■ Todas as afirmações são falsas.

[B] Todas as afirmações são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

[A] $y_p = t^2 \left[P \cos(bt) + Q \operatorname{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.

[B] $y_p = t^2 \left[P(t) \cos(bt) + Q(t) \operatorname{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

■ $y_p = t \left[P(t) \cos(bt) + Q(t) \operatorname{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

[D] $y_p = tP(t) \cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

[E] $y_p = P(t) \cos(bt) + Q(t) \operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 3 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $-\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [C] $\frac{1}{8}$.
- [D] $\frac{1}{4}$.
- [E] 2.

Questão 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] O problema admite exatamente uma solução.
- [B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [D] O problema nao admite solução.
- [E] O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 5 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 12.
- [B] 9.
- ■ 8.
- [D] 6.
- [E] 5.

Questão 6 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- $\boxed{\text{A}}$ $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $y(2) = 16$.
- $\boxed{\text{D}}$ $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[redacted] Todas as afirmações são falsas.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[redacted] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

B $y' = e^{3y/2} + 150$.

C $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

[redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.

2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .

3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.

4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.

5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.

6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.

7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.

8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [C] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- [D] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [E] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 3 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 16$.
- [B] $y(2) = \frac{9}{2}$.
- [C] $y(2) = \frac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- [E] $y(2) = 4$.

Questão 4 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 6.
[B] 9.
[C] 12.
[D] 5.
■ 8.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.
[B] Todas as afirmações são verdadeiras.
[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

$\boxed{\text{A}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

■ O problema admite infinitas soluções.

$\boxed{\text{C}}$ O problema nao admite solução.

$\boxed{\text{D}}$ O problema admite exatamente uma solução.

$\boxed{\text{E}}$ O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 7 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

$\boxed{\text{A}}$ $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

$\boxed{\text{B}}$ $y' = e^{3y/2} + 150$.

$\boxed{\text{C}}$ $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

$\boxed{\text{E}}$ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 9 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

[A] $\dfrac{1}{8}$.

[B] $-\dfrac{1}{8}$.

[C] 2.

■ $-\dfrac{1}{4}$.

[E] $\dfrac{1}{4}$.

Questão 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 11 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A B C D ■

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

$\boxed{\text{A}}$ $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

$\boxed{\text{B}}$ $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150).$

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

$\boxed{\text{D}}$ $y' = e^{3y/2} + 150.$

$\boxed{\text{E}}$ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150).$

Questão 2 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

$\boxed{\text{A}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{B}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

$\boxed{\text{C}}$ $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{E}}$ $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 3 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

$\boxed{\text{A}}$ O problema nao admite solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

$\boxed{\text{C}}$ O problema admite exatamente uma solução.

$\boxed{\text{D}}$ O problema admite exatamente duas soluções.

$\boxed{\text{E}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 4 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\frac{1}{4}$.

[B] 2.

[C] $-\frac{1}{8}$.

[D] $\frac{1}{8}$.

[E] $\frac{1}{4}$.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = 4$.

[B] $y(2) = \frac{9}{2}$.

[C] $y(2) = 16$.

[D] $y(2) = \frac{15}{4}$.

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[B] Todas as afirmações são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[redacted] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são falsas.

E Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 8 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- B 9.
- ■ 8.
- D 6.
- E 12.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B C D ■

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- [E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 3 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 4 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 2.

■ $-\frac{1}{4}$.

[C] $\frac{1}{4}$.

[D] $\frac{1}{8}$.

[E] $-\frac{1}{8}$.

Questão 5 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 6.
- B 12.
- C 9.
- ■ 8.
- E 5.

Questão 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- C O problema admite exatamente duas soluções.
- D O problema nao admite solução.
- E Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- B $y(2) = 16$.
- C $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- E $y(2) = 4$.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3} y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = t^2 \big[P \cos(bt) + Q \operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- B $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- C $y_p = t^2 \big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- E $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 11 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A 2.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- C $-\dfrac{1}{8}$.
- D $\dfrac{1}{8}$.
- E $\dfrac{1}{4}$.

Questão 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- A O problema admite exatamente uma solução.
- B Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- D O problema nao admite solução.
- E O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 5 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- B $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- C $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- D $y' = e^{3y/2} + 150$.
- E $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 6 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [B] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [C] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [E] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Todas as afirmações são falsas.

[D] Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 10 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 4$.
- [B] $y(2) = \frac{15}{4}$.
- [C] $y(2) = \frac{9}{2}$.
- [D] $y(2) = 16$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

Questão 11 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 9.
- ■ 8.
- [C] 5.
- [D] 6.
- [E] 12.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.

2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .

3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.

4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.

5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.

6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.

7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.

8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\frac{1}{4}$.

B $\frac{1}{8}$.

C $-\frac{1}{8}$.

D 2.

E $\frac{1}{4}$.

Questão 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 3 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = \frac{9}{2}$.

B $y(2) = 4$.

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

D $y(2) = 16$.

E $y(2) = \frac{15}{4}$.

Questão 4 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[B] Todas as afirmações são falsas.

[C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

■ O problema admite infinitas soluções.

[B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

[C] O problema admite exatamente duas soluções.

[D] O problema nao admite solução.

[E] O problema admite exatamente uma solução.

Questão 6 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

[B] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

[C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

[D] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.

[E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 7 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 6.

[B] 5.

[C] 9.

■ 8.

[E] 12.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 9 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
C Todas as afirmações são verdadeiras.
D Todas as afirmações são falsas.
E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 11 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
[redacted] $y_p = t\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
C $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
D $y_p = t^2\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
E $y_p = t^2\left[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ______________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
[B] Todas as afirmações são falsas.
[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 2 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
[C] $y' = e^{3y/2} + 150$.
[D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
[E] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

Questão 3 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 4 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- A Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy+2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

[redacted] $-\frac{1}{4}$.

B $\frac{1}{4}$.

C $\frac{1}{8}$.

D $-\frac{1}{8}$.

E 2.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

B Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

[B] $y(2) = 16$.

[C] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

$\blacksquare$ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

[E] $y(2) = 4$.

Questão 10 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

[A] O problema nao admite solução.

[B] O problema admite exatamente uma solução.

$\blacksquare$ O problema admite infinitas soluções.

[D] O problema admite exatamente duas soluções.

[E] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 11 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 12.

[B] 5.

[C] 9.

$\blacksquare$ 8.

[E] 6.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________________ **NUSP:** __________________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere a equação diferencial linear

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 6.
- B 5.
- C 9.
- D 12.
- ■ 8.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- ■ O problema admite infinitas soluções.
- B O problema admite exatamente duas soluções.
- C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- D O problema admite exatamente uma solução.
- E O problema nao admite solução.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 4 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A 2.

■ $-\dfrac{1}{4}$.

C $\dfrac{1}{8}$.

D $\dfrac{1}{4}$.

E $-\dfrac{1}{8}$.

Questão 5 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Todas as afirmações são falsas.
[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 6 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
[B] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
[D] $y(2) = 4$.
[E] $y(2) = 16$.

Questão 7 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

[C] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

[D] $y' = e^{3y/2} + 150$.

[E] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Todas as afirmações são falsas.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 11 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

B $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

C $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

D $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

E $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

■ 8.
[B] 5.
[C] 6.
[D] 9.
[E] 12.

Questão 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
■ Todas as afirmações são falsas.
[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 3 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

[B] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

[C] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.

[D] $y' = e^{3y/2} + 150$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\frac{1}{4}$.
- [B] $-\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [D] $\frac{1}{8}$.
- [E] 2.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são falsas.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 16$.
- [B] $y(2) = \frac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- [D] $y(2) = 4$.
- [E] $y(2) = \frac{9}{2}$.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Todas as afirmações são falsas.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = t^2\left[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\right]$, onde P e Q são constantes.

■ $y_p = t\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

C $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

D $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = t^2\left[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\right]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 10 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema admite exatamente duas soluções.
- $\boxed{\text{B}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- $\boxed{\text{D}}$ O problema nao admite solução.
- $\boxed{\text{E}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 11 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

■ $-\dfrac{1}{4}$.

[B] $\dfrac{1}{8}$.

[C] 2.

[D] $-\dfrac{1}{8}$.

[E] $\dfrac{1}{4}$.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[D] Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = \frac{9}{2}$.

[B] $y(2) = 16$.

[C] $y(2) = \frac{15}{4}$.

■ $y(2) = \frac{17}{4}$.

[E] $y(2) = 4$.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente duas soluções.

[redacted] O problema admite infinitas soluções.

C O problema nao admite solução.

D O problema admite exatamente uma solução.

E Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 7 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

■ Todas as afirmações são falsas.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

■ 8.
B 9.
C 6.
D 5.
E 12.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
D $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
E $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = e^{3y/2} + 150$.
B $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
C $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
D $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: ■ B C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] O problema admite exatamente uma solução.
- [B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- [C] O problema nao admite solução.
- [D] O problema admite exatamente duas soluções.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 9.
- [B] 12.
- [C] 5.
- [D] 6.
- ■ 8.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [E] $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 4 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- C $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 5 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 6 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [C] 2.
- [D] $-\frac{1}{8}$.
- [E] $\frac{1}{4}$.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Todas as afirmações são falsas.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 16$.

B $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

C $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

E $y(2) = 4$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- [E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 5 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = e^{3y/2} + 150.$
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$
- [C] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$
- [D] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$
- [E] $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\dfrac{1}{8}.$
- [B] $\dfrac{1}{4}.$
- [C] $-\dfrac{1}{8}.$
- [D] 2.
- ■ $-\dfrac{1}{4}.$

Questão 7 Considere a equação diferencial linear

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 6.
- [B] 5.
- [C] 9.
- ■ 8.
- [E] 12.

Questão 8 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- $\boxed{\text{A}}$ $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- $\boxed{\text{B}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- $\boxed{\text{D}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\operatorname{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- $\boxed{\text{E}}$ $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\operatorname{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 9 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- $\boxed{\text{A}}$ $y(2) = 4$.
- $\boxed{\text{B}}$ $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $y(2) = 16$.
- $\boxed{\text{E}}$ $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

Questão 11 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ O problema nao admite solução.
- $\boxed{\text{B}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- $\boxed{\text{C}}$ O problema admite exatamente uma solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- $\boxed{\text{E}}$ O problema admite exatamente duas soluções.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B C ■ E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

■ O problema admite infinitas soluções.

[B] O problema nao admite solução.

[C] O problema admite exatamente uma solução.

[D] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

[E] O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 9.

■ 8.

[C] 6.

[D] 5.

[E] 12.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = e^{3y/2} + 150$.

[B] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

[D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

[E] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são falsas.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- C $-\frac{1}{8}$.
- D $\frac{1}{8}$.
- E 2.

Questão 6 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

B $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

C $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 16$.

B $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

D $y(2) = 4$.

E $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 8 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
B Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
C Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
■ Todas as afirmações são verdadeiras.
E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
■ Todas as afirmações são falsas.
C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
D Todas as afirmações são verdadeiras.
E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Todas as afirmações são falsas.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 2 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = e^{3y/2} + 150.$
- B $y' = \frac{3y}{2} + 150.$
- C $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$
- D $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}.$
- B $y(2) = \dfrac{15}{4}.$
- C $y(2) = 4.$
- D $y(2) = \dfrac{9}{2}.$
- E $y(2) = 16.$

Questão 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Todas as afirmações são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 5.

[B] 6.

[C] 12.

[D] 9.

■ 8.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 9 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\dfrac{1}{8}$.
- B $\dfrac{1}{4}$.
- C 2.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- E $-\dfrac{1}{8}$.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- B $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- C $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- D $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- E $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 11 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

$\boxed{\text{A}}$ Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

$\boxed{\text{B}}$ O problema admite exatamente uma solução.

$\boxed{\text{C}}$ O problema admite exatamente duas soluções.

■ O problema admite infinitas soluções.

$\boxed{\text{E}}$ O problema nao admite solução.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ________________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B Todas as afirmações são falsas.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema nao admite solução.

B O problema admite exatamente uma solução.

C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

[redacted] O problema admite infinitas soluções.

E O problema admite exatamente duas soluções.

Questão 3 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

B $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

C $y' = e^{3y/2} + 150$.

D $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Todas as afirmações são falsas.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 5 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[B] Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 6 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[redacted] Todas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2y = t^2\cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

A $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

B $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

C $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

[redacted] $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

E $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 9 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\dfrac{1}{8}$.

[redacted] $-\dfrac{1}{4}$.

C $\dfrac{1}{4}$.

D $\dfrac{1}{8}$.

E 2.

Questão 10 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 12.
- ■ 8.
- [D] 6.
- [E] 9.

Questão 11 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [B] $y(2) = 4$.
- [C] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- [D] $y(2) = 16$.
- [E] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: ■ B C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 3 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- B $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- D $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 4 Considere a equação diferencial linear

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 9.
- B 6.
- C 12.
- ■ 8.
- E 5.

Questão 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são verdadeiras.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 6 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 8 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 16$.
- [B] $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- [D] $y(2) = \frac{15}{4}$.
- [E] $y(2) = \frac{9}{2}$.

Questão 9 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 2.
- [B] $\frac{1}{4}$.
- [C] $-\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [E] $\frac{1}{8}$.

Questão 10 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [C] O problema admite exatamente duas soluções.
- [D] O problema nao admite solução.
- [E] O problema admite exatamente uma solução.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ Todas as afirmações são falsas.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A B ■ D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

$\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

$\boxed{\text{E}}$ Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

$\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

$\boxed{\text{C}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{\text{E}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{C}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- $\boxed{\text{A}}$ 9.
- $\boxed{\text{B}}$ 5.
- ■ 8.
- $\boxed{\text{D}}$ 6.
- $\boxed{\text{E}}$ 12.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- C $\frac{1}{8}$.
- D 2.
- E $-\frac{1}{8}$.

Questão 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- ■ O problema admite infinitas soluções.
- B O problema nao admite solução.
- C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- D O problema admite exatamente duas soluções.
- E O problema admite exatamente uma solução.

Questão 7 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Todas as afirmações são falsas.

[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[E] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

[A] $y' = e^{3y/2} + 150.$

[B] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$

[C] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

[E] $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

Questão 9 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- B $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- D $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- E $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 11 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = 16$.
- B $y(2) = \frac{15}{4}$.
- C $y(2) = \frac{9}{2}$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- E $y(2) = 4$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente uma solução.

B Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

C O problema admite exatamente duas soluções.

D O problema nao admite solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 5.

B 12.

■ 8.

D 9.

E 6.

Questão 4 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [C] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [D] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- [E] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

Questão 5 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [B] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- [C] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [D] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [E] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\dfrac{1}{4}$.
- [B] $\dfrac{1}{8}$.
- [C] 2.
- [D] $-\dfrac{1}{8}$.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.

Questão 7 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
■ Todas as afirmações são verdadeiras.
[D] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.
■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 9 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são verdadeiras.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 10 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- A $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- B $y(2) = 4$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- D $y(2) = 16$.
- E $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

Questão 11 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Todas as afirmações são falsas.
- [B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C D ■

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C ■ E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C D ■

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Todas as afirmações são falsas.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema nao admite solução.

B O problema admite exatamente uma solução.

C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

D O problema admite exatamente duas soluções.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 3 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 4 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 5.

B 12.

C 6.

[redacted] 8.

E 9.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2 dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $\frac{1}{8}$.
- B $-\frac{1}{8}$.
- C 2.
- D $\frac{1}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.

Questão 6 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- B $y(2) = 4$.
- C $y(2) = \frac{9}{2}$.
- D $y(2) = \frac{15}{4}$.
- E $y(2) = 16$.

Questão 7 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- B $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- C $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- E $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 8 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B Todas as afirmações são verdadeiras.
- C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 9 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- A $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- C $y' = e^{3y/2} + 150$.
- D $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

Questão 10 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E Todas as afirmações são falsas.

Questão 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

D Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A B C D ■

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [C] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [D] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [E] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 6.
- [B] 12.
- [C] 5.
- ■ 8.
- [E] 9.

Questão 3 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $-\frac{1}{8}$.
- [B] $\frac{1}{4}$.
- [C] 2.
- [D] $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
C Todas as afirmações são verdadeiras.
D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
E Todas as afirmações são falsas.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

A $y(2) = 4$.
B $y(2) = 16$.
C $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
D $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

Questão 6 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
C $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
D $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
E $y' = e^{3y/2} + 150$.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são falsas.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são falsas.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3} y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

■ Todas as afirmações são falsas.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 10 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente uma solução.

B O problema admite exatamente duas soluções.

C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2} e^{-\pi}$.

D O problema nao admite solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 11 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: A B C D ■

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B C D ■

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: ■ B C D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- [B] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- [C] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [E] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

Questão 2 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [B] $y(2) = 16$.
- [C] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- [D] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- [E] $y(2) = 4$.

Questão 3 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [C] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [D] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- [E] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

Questão 4 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 5 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\dfrac{1}{4}$.
- [B] $-\dfrac{1}{8}$.
- [C] 2.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- [E] $\dfrac{1}{8}$.

Questão 6 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.
B Todas as afirmações são falsas.
C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 7 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

A 6.
■ 8.
C 12.
D 9.
E 5.

Questão 8 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema admite exatamente uma solução.

■ O problema admite infinitas soluções.

C Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

D O problema admite exatamente duas soluções.

E O problema nao admite solução.

Questão 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

A Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Todas as afirmações são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] Todas as afirmações são falsas.
- [D] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- [A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: ■ B C D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B ■ D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C ■ E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- A $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- C $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\text{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- D $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\text{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- E $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C Todas as afirmações são falsas.
- D Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Todas as afirmações são falsas.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [B] O problema admite exatamente uma solução.
- [C] O problema admite exatamente duas soluções.
- [D] O problema nao admite solução.
- [E] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 5 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 6.
- [C] 9.
- ■ 8.
- [E] 12.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $-\frac{1}{8}$.
- [B] $\frac{1}{4}$.
- [C] 2.
- [D] $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = 16$.
- [B] $y(2) = \frac{15}{4}$.
- [C] $y(2) = \frac{9}{2}$.
- ■ $y(2) = \frac{17}{4}$.
- [E] $y(2) = 4$.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = e^{3y/2} + 150.$

[redacted] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

C $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$

D $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

E $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$

Questão 9 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[redacted] Todas as afirmações são verdadeiras.

B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2 y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- $\boxed{\text{A}}$ Todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ Todas as afirmações são falsas.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ____________________________________ **NUSP:** ________________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: ■ B C D E

Questão 05: A B C ■ E

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B C ■ E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B ■ D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3} y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são falsas.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 4 Considere a equação diferencial linear

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

[A] 9.

■ 8.

[C] 5.

[D] 6.

[E] 12.

Questão 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

[A] O problema nao admite solução.

[B] O problema admite exatamente uma solução.

[C] O problema admite exatamente duas soluções.

[D] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2} e^{-\pi}$.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- A $-\frac{1}{8}$.
- B $\frac{1}{4}$.
- C 2.
- D $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.

Questão 7 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Todas as afirmações são falsas.
- B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são verdadeiras.
- E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 8 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- [B] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [D] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [E] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 9 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- [A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 10 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- $\boxed{\text{A}}$ $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $y(2) = 16$.
- $\boxed{\text{C}}$ $y(2) = 4$.
- $\boxed{\text{D}}$ $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

Questão 11 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- $\boxed{\text{A}}$ $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- $\boxed{\text{C}}$ $y' = e^{3y/2} + 150$.
- $\boxed{\text{D}}$ $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right)$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A ■ C D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B C D ■

Questão 06: A B C D ■

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A B ■ D E

Questão 09: A ■ C D E

Questão 10: A B C D ■

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 2.
- [B] $-\frac{1}{8}$.
- [C] $\frac{1}{8}$.
- ■ $-\frac{1}{4}$.
- [E] $\frac{1}{4}$.

Questão 2 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] O problema nao admite solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.
- [C] O problema admite exatamente uma solução.
- [D] O problema admite exatamente duas soluções.
- [E] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

- [A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ Todas as afirmações são falsas.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 4 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[A] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[B] Todas as afirmações são verdadeiras.

[C] Todas as afirmações são falsas.

■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 5 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[D] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[E] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 6 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

[A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[C] Todas as afirmações são falsas.
[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 7 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

[A] $y(2) = 16$.
[B] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
[D] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
[E] $y(2) = 4$.

Questão 8 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

[A] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
[B] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
[C] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.
[D] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

Questão 9 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

- [A] $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(y + 150)$.
- [B] $y' = e^{3y/2} + 150$.
- ■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.
- [D] $y' = \frac{3y}{2} + 150$.
- [E] $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(y + 150)$.

Questão 10 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 11 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 9.
- B 5.
- C 12.
- ■ 8.
- E 6.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B C ■ E

Questão 02: A ■ C D E

Questão 03: A ■ C D E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B ■ D E

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B ■ D E

Questão 11: A B C ■ E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.

2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .

3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.

4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.

5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.

6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.

7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.

8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

- A Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D Todas as afirmações são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são falsas.

Questão 2 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- A 5.
- B 6.
- C 9.
- ■ 8.
- E 12.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

■ Todas as afirmações são falsas.

[B] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] Todas as afirmações são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 4 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

- [A] $y(2) = \dfrac{15}{4}$.
- ■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.
- [C] $y(2) = 4$.
- [D] $y(2) = \dfrac{9}{2}$.
- [E] $y(2) = 16$.

Questão 6 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] $\dfrac{1}{8}$.
- ■ $-\dfrac{1}{4}$.
- [C] $\dfrac{1}{4}$.
- [D] 2.
- [E] $-\dfrac{1}{8}$.

Questão 7 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

- [A] O problema admite exatamente uma solução.
- [B] Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.
- [C] O problema admite exatamente duas soluções.
- [D] O problema nao admite solução.
- ■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 8 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

A $y' = \frac{3y}{2} + 150.$

B $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(y + 150\right).$

C $y' = e^{3y/2} + 150.$

D $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(y + 150\right).$

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150.$

Questão 9 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

A Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Todas as afirmações são falsas.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 10 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

- [A] $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [B] $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.
- [C] $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.
- ■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.
- [E] $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

Questão 11 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\Big(1 - \frac{y}{5}\Big), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C ■ E

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A B C D ■

Questão 05: A ■ C D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A B C D ■

Questão 09: A B ■ D E

Questão 10: A B C ■ E

Questão 11: A ■ C D E

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as afirmações:

(I) Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right), \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 5$.

(II) A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

(III) Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

Assinale a alternativa correta.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C Todas as afirmações são verdadeiras.

D Todas as afirmações são falsas.

E Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 2 Considere as afirmações:

(I) Se $y(x)$, com $x > 0$, é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1$$

então $y' = 1$.

(II) A equação diferencial $y' = x + y$ é separável.

(III) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, com $x > 0$, é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

Assinale a alternativa correta.

A Todas as afirmações são verdadeiras.

B Todas as afirmações são falsas.

C Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[redacted] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução da equação para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(II) A equação $y'' - y = e^x$ possui uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$ com $A \in \mathbb{R}$.

(III) A equação diferencial $y' = \frac{1}{3}y^{2/3}$ com condição inicial $y(0) = 0$ possui solução única.

[A] Todas as afirmações são verdadeiras.

[B] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ Todas as afirmações são falsas.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Questão 4 Sejam f e g duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

o Wronskiano de ambas funções. Considere também a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(H)}$$

onde p e q são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Analise as afirmações a seguir.

(I) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, então f e g são linearmente dependentes.

(II) Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.

(III) Se f e g são **soluções** de (H) e existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) \neq 0$, então $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

[A] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

[C] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[E] Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 5 Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $xy' + 2y = 4x^2$ com condição inicial $y(1) = 2$. Podemos afirmar:

$\boxed{\text{A}}$ $y(2) = \dfrac{9}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $y(2) = \dfrac{15}{4}$.

■ $y(2) = \dfrac{17}{4}$.

$\boxed{\text{D}}$ $y(2) = 4$.

$\boxed{\text{E}}$ $y(2) = 16$.

Questão 6 Seja b um número real diferente de zero. Para encontrar uma solução particular y_p da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = t^2 \cos(bt)$$

pelo Método dos Coeficientes Indeterminados, e ter a certeza de encontrar todos os coeficientes, é suficiente supor que:

$\boxed{\text{A}}$ $y_p = t^2\big[P\cos(bt) + Q\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde P e Q são constantes.

$\boxed{\text{B}}$ $y_p = t^2\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 1.

■ $y_p = t\big[P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)\big]$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{D}}$ $y_p = P(t)\cos(bt) + Q(t)\,\mathrm{sen}(bt)$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são polinômios de grau 2.

$\boxed{\text{E}}$ $y_p = tP(t)\cos(bt)$, onde $P(t)$ é um polinômio de grau 2.

Questão 7 Sabe-se que uma população isolada nas montanhas cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, tornando-se 50% maior a cada década na ausência de fatores externos. A partir de uma determinada data inicial, a referida população passa a receber um fluxo imigratório de 15 pessoas por ano. Sendo $y(t)$ o número de pessoas t décadas após o início do fluxo imigratório, pode-se afirmar que y é solução da equação:

$\boxed{\text{A}}$ $y' = e^{3y/2} + 150$.

$\boxed{\text{B}}$ $y' = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\big(y + 150\big)$.

$\boxed{\text{C}}$ $y' = \frac{3y}{2} + 150$.

$\boxed{\text{D}}$ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\big(y + 150\big)$.

■ $y' = \ln\left(\frac{3}{2}\right)y + 150$.

Questão 8 Seja $y(x)$, com $x > 0$, solução da equação diferencial $(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ com condição inicial $y = 1$ quando $x = 1$. Então $y(2)$ é igual a

A $-\frac{1}{8}$.

B 2.

C $\frac{1}{4}$.

■ $-\frac{1}{4}$.

E $\frac{1}{8}$.

Questão 9 Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = e^{-2\pi} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

A O problema nao admite solução.

B O problema admite exatamente uma solução.

C O problema admite exatamente duas soluções.

D Se $y(t)$ é uma solução, então $y(\pi) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$.

■ O problema admite infinitas soluções.

Questão 10 Dada a equação $yy'' + 2(y')^2 = 0$, considere as seguintes afirmações.

(I) A equação não admite solução pois a variável independente está ausente.

(II) A equação admite somente a solução trivial por ser homogênea não linear de segunda ordem.

(III) A substituição $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ transforma a equação em duas equações de primeira ordem: $u = \dfrac{dy}{dx}$ e outra equação separável em u e y.

Podemos afirmar que:

- [A] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] Todas as afirmações são falsas.

Questão 11 Considere a equação diferencial linear

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Sabe-se que $y_1(x) = x^2$ é uma solução dessa equação. Seja $y(x)$ com $x > 0$ a solução tal que $y(1) = 1$ e $y'(1) = 3$. Então $y(2)$ é igual a

- [A] 5.
- [B] 12.
- [C] 6.
- ■ 8.
- [E] 9.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ________________________________ **NUSP:** ________________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: ■ B C D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: A B ■ D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A B ■ D E

Questão 07: A B C D ■

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: A B C D ■

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: A B C ■ E