Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2017 - 05/12/2017

Turma A

1ª Questão: (4,0 pontos) Resolva as equações diferenciais:

a) $\left(4y^2\sin(x^2) + 8x^2y^2\cos(x^2)\right)dx + \left(4xy\sin(x^2) + 4y^2\right)dy = 0$

b) $y' = \dfrac{2y^2 + 3xy}{xy + 2x^2}$

Solução:

a) Sejam $P(x,y) = 4y^2\sin(x^2) + 8x^2y^2\cos(x^2)$ e $Q(x,y) = 4xy\sin(x^2) + 4y^2$.

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4y\sin(x^2) + 8x^2y\cos(x^2) \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = 8y\sin(x^2) + 16x^2y\cos(x^2)$, a equação não é exata.

Como $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = -\frac{4y\sin(x^2)+8x^2y\cos(x^2)}{4y^2\sin(x^2)+8x^2y^2\cos(x^2)} = -\frac{1}{y}$ depende apenas de y, a equação admite um fator integrante que depende apenas de y, dado por:

$$\mu(y) = Ke^{\int(-\frac{1}{y})\,dy} = Ke^{-\ln|y|} = Ke^{\ln|\frac{1}{y}|} = K\frac{1}{|y|}$$

Escolhendo $K = 1$ para $y > 0$ e $K = -1$ para $y < 0$, temos: $\mu(y) = \frac{1}{y}$

Multiplicando a EDO pelo fator integrante, temos:

$$\left(4y\sin(x^2) + 8x^2y\cos(x^2)\right)dx + \left(4x\sin(x^2) + 4y\right)dy = 0$$

Sendo assim, agora temos: $P(x,y) = 4y\sin(x^2) + 8x^2y\cos(x^2)$ e $Q(x,y) = 4x\sin(x^2) + 4y$.

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4\sin(x^2) + 8x^2\cos(x^2) = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, a equação é exata.

A solução de uma EDO exata é dada por $\phi(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, sendo que $\nabla\phi = (P,Q)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 4y\sin(x^2) + 8x^2y\cos(x^2) \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 4x\sin(x^2) + 4y \end{cases}$$

Integrando em y a segunda equação:

$$\phi(x,y) = 4xy\sin(x^2) + 2y^2 + c(x)$$

Derivando em x:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4y\sin(x^2) + 8x^2y\cos(x^2) + c'(x)$$

Comparando com a primeira equação:

$$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

Escolhendo $k = 0$, temos:

$$\phi(x,y) = 4xy\sin(x^2) + 2y^2$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$4xy\sin(x^2) + 2y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$y' = \frac{2y^2 + 3xy}{xy + 2x^2} = f(x,y)$$

Como $f(x,y) = f(tx,ty), \forall t \neq 0$, temos que a equação é homogênea. Sendo assim, utilizamos a seguinte mudança de variável: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{2u^2x^2 + 3ux^2}{ux^2 + 2x^2} = \frac{2u^2 + 3u}{u + 2}$$

$$u'x = \frac{2u^2 + 3u - u^2 - 2u}{u+2} = \frac{u^2 + u}{u+2} \Rightarrow \int \frac{u+2}{u(u+1)}du = \int \frac{dx}{x},\ u \neq 0 \text{ e } u \neq -1$$

Repare que $u = 0 \Rightarrow y = 0$ e $u = -1 \Rightarrow y = -x$ são soluções da EDO.

Expandindo a função $\frac{u+2}{u(u+1)}$ em frações parciais:

$$\frac{u+2}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$$

$$A(u+1) + Bu = u + 2 \Rightarrow A = 2, B = -1$$

$$\therefore \int \frac{du}{u(u+1)} = 2\ln|u| - \ln|u+1| = \ln\left|\frac{u^2}{u+1}\right|$$

Sendo assim, temos:

$$\ln\left|\frac{u^2}{u+1}\right| = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{u^2}{u+1} = Cx, C \in \mathbb{R}$$

Portanto as soluções da equação diferencial são dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{xy + x^2} = Cx, C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

2ª Questão: (2,0 pontos) Encontre a solução geral da equação

$$y'' - 2y' - 8y = e^{-2x} + 2x^2$$

Solução:

Deseja-se resolver a seguinte EDO:

$$y'' - 2y' - 8y = e^{-2x} + 2x^2 \tag{1}$$

Para isso, primeiro vamos encontrar a solução da equação homogênea:

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \tag{2}$$

Como a equação possui coeficientes constantes, temos que as soluções da equação homogênea são da forma

$$y(x) = e^{sx} \tag{3}$$

Deverivando (3) e substituindo em (2), obtemos o seguinte polinômio característico:

$$s^2 - 2s - 8 = 0 \Leftrightarrow (s-4)(s+2) = 0$$

Sendo assim, a solução da equação homogênea é dada por:

$$y_h(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar a solução geral da equação (1), iremos utilizar o Método dos Coeficientes a Determinar e o princípio da superposição. Assim, primeiramente encontramos uma solução particular para a seguinte EDO:

$$y'' - 2y' - 8y = e^{-2x} \tag{4}$$

Como -2 é raiz simples do polinômio característico, propomos a seguinte solução particular:

$$y_{p_1}(x) = xAe^{-2x} \tag{5}$$

Derivando (5):

$$y'_{p_1}(x) = A(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = (1-2x)Ae^{-2x}$$
$$y''_{p_1}(x) = A[(-2)e^{-2x} + (1-2x)e^{-2x}(-2)] = (-4+4x)Ae^{-2x}$$

Substituindo em (4):

$$1 \cdot (-4+4x)Ae^{-2x} - 2 \cdot (1-2x)Ae^{-2x} - 8 \cdot xAe^{-2x} = e^{-2x}$$
$$\Rightarrow Ae^{-2x}(-4+4x-2+4x-8x) = e^{-2x}$$
$$\Rightarrow Ae^{-2x} \cdot (-6) = e^{-2x} \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$$
$$\therefore y_{p_1}(x) = -\frac{xe^{-2x}}{6}$$

Agora encontramos uma solução particular para a seguinte EDO:

$$y'' - 2y'' - 8y = 2x^2 \tag{6}$$

Propomos a seguinte solução particular:

$$y_{p_2}(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{7}$$

Derivando (14):

$$y'_{p_2}(x) = 2Ax + B$$
$$y''_{p_2}(x) = 2A$$

Substituindo em (13):

$$1 \cdot 2A - 2(2Ax + B) - 8(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2$$
$$\begin{cases} -8A = 2 \\ -4A - 8B = 0 \\ 2A - 2B - 8C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{8} \\ C = -\frac{3}{32} \end{cases}$$
$$\therefore y_{p_2}(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3}{32}$$

Pelo pricípio da superposição, temos que $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ é uma solução particular de (1).

A solução geral da equação é a soma da solução homogênea com a solução particular. Assim:

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{xe^{-2x}}{6} + -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3}{32},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3ª Questão: (3,0 pontos) Sabendo que $y_1(x) = x^3$ é solução da equação

$$x^2y'' + xy' - 9y = 0$$

determine, para $x > 0$, a solução geral de

$$x^2y'' + xy' - 9y = \ln x$$

e determine a solução desta última equação que satisfaz o problema de condições iniciais com $y(1) = 0$ e $y'(1) = 1$.

Solução:

Inicialmente vamos encontrar outra solução da equação homogênea $y_2(x)$, supondo que $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^3$ seja solução da equação diferencial dada. Calculando as derivadas de $y_2(x)$:

$$y_2' = u'x^3 + 3ux^2$$
$$y_2'' = u''x^3 + 6u'x^2 + 6ux$$

Substituindo na EDO homogênea:

$$x^2(u''x^3 + 6u'x^2 + 6ux) + x(u'x^3 + 3ux^2) - 9ux^3 = 0$$
$$x^5u'' + 7x^4u' = 0$$

A equação obtida pode ser resolvida separando-se as variáveis:

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{7}{x}$$
$$\ln|u'| = -7\int\frac{dx}{x}$$
$$u' = Cx^{-7},\ C \in \mathbb{R}^*$$
$$\therefore u(x) = -\frac{Cx^{-6}}{6} + K,\ C \in \mathbb{R}^*,\ K \in \mathbb{R}$$

Logo, escolhendo $C = -6$ e $K = 0$, temos:

$$y_2(x) = u(x)x^3 = x^{-3}$$

A solução homogênea da equação é a combinação linear das duas soluções homogêneas, y_1 e y_2:

$$y_h(x) = C_1x^3 + C_2x^{-3}, C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Agora utilizamos o método da Variação dos Parâmetros para encontrar uma solução particular da seguinte forma:

$$y_p(x) = u_1(x)x^3 + u_2(x)x^{-3}$$

Aplicando o método:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^3 & x^{-3} \\ 3x^2 & -3x^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\ln x}{x^2} \end{bmatrix}$$

Repare que $q(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, visto que o coeficiente de y'' é x^2.

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-3} \\ \frac{\ln x}{x^2} & -3x^{-4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^3 & x^{-3} \\ 3x^2 & -3x^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{-x^{-5}\ln x}{-6x^{-1}} = \frac{\ln x}{6x^4}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^3 & x^{-3} \\ 3x^2 & -3x^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{x\ln x}{-6x^{-1}} = -\frac{x^2 \ln x}{6}$$

Integrando:

$$u_1 = \frac{1}{6}\int \frac{\ln x}{x^4}\,dx = \frac{1}{6}\int \ln x \,\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^{-3}}{-3}\Big)dx = \frac{1}{6}\Big(\frac{x^{-3}\ln x}{-3} + \frac{1}{3}\int x^{-4}\,dx\Big) = \frac{1}{6}\Big(-\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}\Big)$$

$$u_2 = -\frac{1}{6}\int x^2 \ln x\,dx = -\frac{1}{6}\int \ln x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^3}{3}\Big)dx = -\frac{1}{6}\Big(\frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx\Big) = -\frac{1}{6}\Big(\frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9}\Big)$$

Assim, obtemos uma solução particular da EDO:

$$y_p(x) = \frac{1}{6}\Big(-\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}\Big)x^3 - \frac{1}{6}\Big(\frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9}\Big)x^{-3} = -\frac{\ln x}{9}$$

A solução geral é a soma da solução homogênea com a solução particular:

$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-3} - \frac{\ln x}{9}, C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Agora precisamos aplicar as condições iniciais para obter os valores de C_1 e C_2. Derivando a solução geral, temos:

$$y'(x) = 3C_1x^2 - 3C_2x^{-4} - \frac{1}{9x}$$

Aplicando as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_1 - 3C_2 - \frac{1}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{27} \\ C_2 = -\frac{5}{27} \end{cases}$$

Portanto, a solução para o problema de soluções iniciais é dada por:

$$y(x) = \frac{5x^3}{27} - \frac{5x^{-3}}{27} - \frac{\ln x}{9}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2017 - 05/12/2017

Turma B
1ª Questão: (4,0 pontos) Resolva as equações diferenciais:

a) $\left(4y^2\cos(x^2) - 8x^2y^2\sin(x^2)\right)dx + \left(4xy\cos(x^2) + 4y^2\right)dy = 0$

b) $y' = \dfrac{3y^2 + 4xy}{xy + 2x^2}$

Solução:

a) Sejam $P(x,y) = 4y^2\cos(x^2) - 8x^2y^2\sin(x^2)$ e $Q(x,y) = 4xy\cos(x^2) + 4y^2$.

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4y\cos(x^2) - 8x^2y\sin(x^2) \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = 8y\cos(x^2) - 16x^2y\sin(x^2)$, a equação não é exata.

Como $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = -\frac{4y\cos(x^2) - 8x^2y\sin(x^2)}{4y^2\cos(x^2) - 8x^2y^2\sin(x^2)} = -\frac{1}{y}$ depende apenas de y, a equação admite um fator integrante que depende apenas de y, dado por:

$$\mu(y) = Ke^{\int(-\frac{1}{y})\,dy} = Ke^{-\ln|y|} = Ke^{\ln|\frac{1}{y}|} = K\frac{1}{|y|}$$

Escolhendo $K = 1$ para $y > 0$ e $K = -1$ para $y < 0$, temos: $\mu(y) = \frac{1}{y}$

Multiplicando a EDO pelo fator integrante, temos:

$$\left(4y\cos(x^2) - 8x^2y\sin(x^2)\right)dx + \left(4x\cos(x^2) + 4y\right)dy = 0$$

Sendo assim, agora temos: $P(x,y) = 4y\cos(x^2) - 8x^2y\sin(x^2)$ e $Q(x,y) = 4x\cos(x^2) + 4y$.

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4\cos(x^2) - 8x^2\sin(x^2) = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, a equação é exata.

A solução de uma EDO exata é dada por $\phi(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, sendo que $\nabla\phi = (P,Q)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 4y\cos(x^2) - 8x^2y\sin(x^2) \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 4x\cos(x^2) + 4y \end{cases}$$

Integrando em y a segunda equação:

$$\phi(x, y) = 4xy\cos(x^2) + 2y^2 + c(x)$$

Derivando em x:
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4y\cos(x^2) - 8x^2y\sin(x^2) + c'(x)$$

Comparando com a primeira equação:

$$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

Escolhendo $k = 0$, temos:

$$\phi(x, y) = 4xy\cos(x^2) + 2y^2$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$4xy\cos(x^2) + 2y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$y' = \frac{3y^2 + 4xy}{xy + 2x^2} = f(x, y)$$

Como $f(x, y) = f(tx, ty), \forall t \neq 0$, temos que a equação é homogênea. Sendo assim, utilizamos a seguinte mudança de variável: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{3u^2x^2 + 4ux^2}{ux^2 + 2x^2} = \frac{3u^2 + 4u}{u + 2}$$

$$u'x = \frac{3u^2 + 4u - u^2 - 2u}{u + 2} = \frac{2u^2 + 2u}{u + 2} \Rightarrow \int \frac{u + 2}{u(u + 1)}du = 2\int \frac{dx}{x},\ u \neq 0 \text{ e } u \neq -1$$

Repare que $u = 0 \Rightarrow y = 0$ e $u = -1 \Rightarrow y = -x$ são soluções da EDO.

Expandindo a função $\frac{u+2}{u(u+1)}$ em frações parciais:

$$\frac{u + 2}{u(u + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u + 1}$$
$$A(u + 1) + Bu = u + 2 \Rightarrow A = 2, B = -1$$
$$\therefore \int \frac{du}{u(u + 1)} = 2\ln|u| - \ln|u + 1| = \ln\left|\frac{u^2}{u + 1}\right|$$

Sendo assim, temos:

$$\ln\left|\frac{u^2}{u+1}\right| = 2\ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$$
$$\frac{u^2}{u+1} = Cx^2, C \in \mathbb{R}$$

Portanto as soluções da equação diferencial são dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{xy+x^2} = Cx^2, C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

2ª Questão: (2,0 pontos) Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' - 8y = e^{-4x} + 4x^2$$

Solução:

Deseja-se resolver a seguinte EDO:

$$y'' + 2y' - 8y = e^{-4x} + 4x^2 \tag{8}$$

Para isso, primeiro vamos encontrar a solução da equação homogênea:

$$y'' + 2y' - 8y = 0 \tag{9}$$

Como a equação possui coeficientes constantes, temos que as soluções da equação homogênea são da forma

$$y(x) = e^{sx} \tag{10}$$

Deverivando (10) e substituindo em (9), obtemos o seguinte polinômio característico:

$$s^2 + 2s - 8 = 0 \Leftrightarrow (s+4)(s-2) = 0$$

Sendo assim, a solução da equação homogênea é dada por:

$$y_h(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar a solução geral da equação (1), iremos utilizar o Método dos Coeficientes a Determinar e o princípio da superposição. Assim, primeiramente encontramos uma solução particular para a seguinte EDO:

$$y'' + 2y' - 8y = e^{-4x} \tag{11}$$

Como -4 é raiz simples do polinômio característico, propomos a seguinte solução particular:

$$y_{p_1}(x) = xAe^{-4x} \tag{12}$$

Derivando (12):

$$y'_{p_1}(x) = A(e^{-4x} - 4xe^{-4x}) = (1-4x)Ae^{-4x}$$
$$y''_{p_1}(x) = A[(-4)e^{-4x} + (1-4x)e^{-4x}(-4)] = (-8+16x)Ae^{-4x}$$

Substituindo em (11):

$$1 \cdot (-8+16x)Ae^{-4x} + 2 \cdot (1-4x)Ae^{-4x} - 8 \cdot xAe^{-4x} = e^{-4x}$$
$$\Rightarrow Ae^{-4x}(-8+16x+2-8x-8x) = e^{-4x}$$
$$\Rightarrow Ae^{-4x} \cdot (-6) = e^{-4x} \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$$
$$\therefore y_{p_1}(x) = -\frac{xe^{-4x}}{6}$$

Agora encontramos uma solução particular para a seguinte EDO:

$$y'' + 2y'' - 8y = 4x^2 \tag{13}$$

Propomos a seguinte solução particular:

$$y_{p_2}(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{14}$$

Derivando (14):

$$y'_{p_2}(x) = 2Ax + B$$
$$y''_{p_2}(x) = 2A$$

Substituindo em (13):

$$1 \cdot 2A + 2(2Ax + B) - 8(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$
$$\begin{cases} -8A = 4 \\ 4A - 8B = 0 \\ 2A + 2B - 8C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = -\frac{3}{16} \end{cases}$$
$$\therefore y_{p_2}(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16}$$

Pelo pricípio da superposição, temos que $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ é uma solução particular de (1).

A solução geral da equação é a soma da solução homogênea com a solução particular. Assim:

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - \frac{xe^{-4x}}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3ª Questão: (3,0 pontos) Sabendo que $y_1(x) = x^2$ é solução da equação

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0$$

determine, para $x > 0$, a solução geral de

$$x^2y'' + xy' - 4y = \ln x$$

e determine a solução desta última equação que satisfaz o problema de condições iniciais com $y(1) = 0$ e $y'(1) = 1$.

Solução:

Inicialmente vamos encontrar outra solução da equação homogênea $y_2(x)$, supondo que $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^2$ seja solução da equação diferencial dada. Calculando as derivadas de $y_2(x)$:

$$\begin{aligned} y_2' &= u'x^2 + 2ux \\ y_2'' &= u''x^2 + 4u'x + 2u \end{aligned}$$

Substituindo na EDO homogênea:

$$\begin{aligned} x^2(u''x^2 + 4u'x + 2u) + x(u'x^2 + 2ux) - 4ux^2 &= 0 \\ x^4u'' + 5x^3u' &= 0 \end{aligned}$$

A equação obtida pode ser resolvida separando-se as variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u'} &= -\frac{5}{x} \\ \ln|u'| &= -5\int \frac{dx}{x} \\ u' &= Cx^{-5},\ C \in \mathbb{R}^* \\ \therefore u(x) &= -\frac{Cx^{-4}}{4} + K,\ C \in \mathbb{R}^*,\ K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $C = -4$ e $K = 0$, temos:

$$y_2(x) = u(x)x^2 = x^{-2}$$

A solução homogênea da equação é a combinação linear das duas soluções homogêneas, y_1 e y_2:

$$y_h(x) = C_1x^2 + C_2x^{-2}, C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Agora utilizamos o método da Variação dos Parâmetros para encontrar uma solução particular da seguinte forma:

$$y_p(x) = u_1(x)x^2 + u_2(x)x^{-2}$$

Aplicando o método:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\ln x}{x^2} \end{bmatrix}$$

Repare que $q(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, visto que o coeficiente de y'' é x^2.

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ \frac{\ln x}{x^2} & -2x^{-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix}} = \frac{-x^{-4}\ln x}{-4x^{-1}} = \frac{\ln x}{4x^3}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix}} = \frac{\ln x}{-4x^{-1}} = -\frac{x\ln x}{4}$$

Integrando:

$$u_1 = \frac{1}{4}\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \frac{1}{4}\int \ln x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^{-2}}{-2}\Big)dx = \frac{1}{4}\Big(\frac{x^{-2}\ln x}{-2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx\Big) = \frac{1}{4}\Big(-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\Big)$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}\int x\ln x\,dx = -\frac{1}{4}\int \ln x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)dx = -\frac{1}{4}\Big(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx\Big) = -\frac{1}{4}\Big(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\Big)$$

Assim, obtemos uma solução particular da EDO:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\Big(-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\Big)x^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\Big)x^{-2} = -\frac{\ln x}{4}$$

A solução geral é a soma da solução homogênea com a solução particular:

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^{-2} - \frac{\ln x}{4}, C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Agora precisamos aplicar as condições iniciais para obter os valores de C_1 e C_2. Derivando a solução geral, temos:

$$y'(x) = 2C_1x - 2C_2x^{-3} - \frac{1}{4x}$$

Aplicando as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{16} \\ C_2 = -\frac{5}{16} \end{cases}$$

Portanto, a solução para o problema de soluções iniciais é dada por:

$$y(x) = \frac{5x^2}{16} - \frac{5x^{-2}}{16} - \frac{\ln x}{4}$$