Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2015 - 24/11/2015

Turma A
Questão 1: (3,5 pontos)

(a) Dê a solução geral da equação
$$y''' - 4y = xe^{2x}$$
e também a solução que satisfaz as condições iniciais
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ e\ y''(0) = 0$$

(b) Determine k sabendo que $\mu(x, y) = \frac{y^k}{x}$ é fator integrante da equação:
$$y\,dx + (xy^2 - x\ln(x))\,dy = 0$$
e, em seguida, resolva a equação para $y(1) = 2$

Solução:

(a) O polinômio característico da equação é dado por: $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda = 0$ cujas raízes são $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 2$. Assim, a solução da equação homogêna y_H é dada por:
$$y_H = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$$
A solução particular terá a forma: $y_P = x(Ax + B)e^{2x}$. Calculam-se as derivadas de y_P e, em seguida, substituem-se essas derivadas na equação diferencial:
$$y_P' = (2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)e^{2x}$$
$$y_P'' = (4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B)e^{2x}$$
$$y_P''' = (8Ax^2 + (24A + 8B)x + 12A + 12B)e^{2x}$$
Substituindo na equação:
$$y_P''' - 4y_P' = (16Ax + 12A + 8B)e^{2x} = xe^{2x}$$
Logo, encontra-se: $A = \frac{1}{16}$ e $-\frac{3}{32}$ A solução geral da equação é:
$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \frac{1}{32}(2x^2 - 3x)e^{2x}$$

Com as condições iniciais dadas é possível encontrar os valores das constantes C_1, C_2, C_3. Para isso, deve-se, inicialmente, calcular as derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 2C_2e^{2x} - 2C_3e^{-2x} + \frac{1}{32}(4x^2 - 2x - 3)e^{2x} \\
y''(x) &= 4C_2e^{2x} + 4C_3e^{-2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + x - 2)e^{2x} \\
y(0) &= 1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\
y'(0) &= 1 \rightarrow 2C_2 - 2C_3 - \frac{3}{32} = 1 \\
y''(0) &= 1 \rightarrow 4C_2 + 4C_3 - \frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, chega-se a:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{16} \\
C_2 &= \frac{39}{128} \\
C_3 &= -\frac{31}{128}
\end{aligned}$$

(b) Analisando a equação dada, nota-se que: $P(x,y) = y$ e $Q(x,y) = xy^2 - x\ln(x)$. Como $\mu(x,y)$ é um fator integrante, vale que:

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \rightarrow Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} = P\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial P}{\partial y}$$

Calculando as derivadas envolvidas na expressão acima:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= y^2 - \ln(x) - 1 \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= 1 \\
\frac{\partial \mu}{\partial x} &= -\frac{y^k}{x^2} \\
\frac{\partial \mu}{\partial y} &= k\frac{y^{k-1}}{x}
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na igualdade anterior:

$$-\frac{y^k}{x^2}(xy^2 - x\ln(x)) + \frac{y^k}{x}(y^2 - \ln(x) - 1) = k\frac{y^{k-1}}{x}y + \frac{y^k}{x}.1$$

Rearranjando os termos vem que:

$$\frac{y^k}{x}(-y^2 + \ln(x) + y^2 - \ln(x) - 1 - k - 1) = 0 \rightarrow \frac{y^k}{x}(-k-2) = 0$$

Portanto, $k = -2$

Para $k = -2$, o fator integrante será igual a $\mu(x,y) = \frac{1}{xy^2}$. Ao multiplicar-se a equação diferencial pelo fator integrante, obter-se-á uma equação exata cuja solução é expressa pela função $\varphi(x,y)$, tal que $\varphi(x,y) = C$. Para encontrar a função $\varphi(x,y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \mu y = \frac{1}{xy} \rightarrow \varphi(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + h(y) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \mu(xy^2 - \ln(x)) = 1 - \frac{\ln(x)}{y^2} \\
\text{Mas também:} \qquad & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\ln(x)}{y^2} + h'(y) \rightarrow h(y) = y
\end{aligned}$$

Assim, a solução é dada por:

$$\varphi(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + y = C$$

Como $y(1) = 2$, decorre que: $C = 2$. Assim:

$$\varphi(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + y = 2$$

Questão 2: Determine a solução geral da equação diferencial

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{(x^2+1)^2}{x+1}$$

sabendo que $y_1(x) = x$ é uma solução da equação homogênea associada **Solução:** Inicialmente encontrar-se-á outra solução da equação homogênea $y_2(x)$, supondo que $y_2(x) = fy_1(x) = fx$ seja solução da equação diferencial dada. Calculando as derivadas de $y_2(x)$:

$$\begin{aligned} y_2' &= f'x + f \\ y_2'' &= f''x + 2f' \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned} (x^2+1)(xf'' + 2v') - 2x(xf' + f) + \frac{2xf}{x} &= 0 \\ (x^2+1)xf'' + 2(x^2+1)f' - 2x^2f' &= 0 \\ (x^2+1)xf'' + 2f' &= 0 \end{aligned}$$

A equação obtida pod ser resolvida separando-se as variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f'} &= -\frac{2}{x(x^2+1)} \\ \ln(f') &= -\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx = -\int \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= -2\ln(x) + \ln(x^2+1) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \\ f' &= 1 + \frac{1}{x^2} \\ f &= x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Logo, $y_2 = f.x = \left(x - \frac{1}{x}\right)x = x^2 - 1$ Assim, a solução da equação da homogênea é $y_H = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x + C_2(x^2-1)$. Para encontrar a solução da equação particular, utiliza-se o método da variação dos parâmetros:

$$\begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = -\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)} = -(x-1) = 1 - x$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{x^2+1}{x+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{x(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} C_1 &= x - \frac{x^2}{2} \\ C_2 &= x - \ln(x+1) \end{aligned}$$

A solução particular y_P é igual a:

$$y_P = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)x + (x - \ln(x+1))(x^2-1)$$

E a solução geral é:

$$y_G = y_H + y_P = C_1 x + C_2(x^2-1) + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)x + (x - \ln(x+1))(x^2-1)$$

Questão 3:

(a) Existem constantes reais a_3, a_2, a_1, a_0 tais que a equação diferencial:

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

tem o conjunto

$$\{e^x, e^{2x}, \ \operatorname{sen}(x)\}$$

como base do seu espaço de soluções? Justifique.

(b) Encontre (e justifique como o fez) constantes reais a_3, a_2, a_1, a_0 e uma função real $q(x)$ tais que a equação diferencial

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = q(x)$$

tem como solução geral:

$$y(x) = C_1e^{-x} + e^x[C_2 \ \operatorname{sen}(2x) + C_3\cos(2x)] + x^3 - x + 1$$

onde C_1,C_2,C_3 são reais.

(c) Ache a solução geral, dada em séries de potências centradas em 0, da equação diferencial

$$y'' - x^2y = 0$$

Solução:

(a) Não existem constantes reais tais que o conjunto dado seja base do espaço de soluções pois se $\operatorname{sen}(x)$ é solução de uma equação diferencial homogênea implica que $\cos(x0)$ também é pois cada um é relativo a uma raiz complexa do polinômio característico quando um número complexo é raiz de um polinômio seu conjugado também é.

(b) Analisando a solução da equação homogênea, conclui-se que as raízes do polinômio característico são: $\lambda = -1$,$\lambda = 1 + 2i$,$\lambda = 1 - 2i$. Assim,o polinômio característico $P(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\lambda + 1)(\lambda - 1 + 2i)(\lambda - 1 - 2i) \\ P(\lambda) &= \lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões fornecidas para $P(\lambda)$ obtém-se: $a_3 = 1$,$a_2 = -1$,$a_1 = 3$ e $a_0 = 5$

(c) Exercício 10, item 2, Parte B da Lista 3 de MAT2456