

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2º Semestre 2013 - 02/12/2013

Turma A

Questão 1: (3,5 pontos)

- (a) Determine a solução y da equação diferencial $2x^2y' = y(y + 3x)$ tal que $y(1) = 1$.
- (b) (i) Determine todas as funções $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tornam exata a equação diferencial $(y^2 \operatorname{sen} x)dx + yf(x)dy = 0$.
- (ii) Considere a função f tal que $f(0) = -1$ e encontre a solução geral da equação dada em (i).

Solução:

- (a) Isolando y' :

$$y' = \frac{y(y + 3x)}{2x^2} = f(x, y), x \neq 0$$

Como $f(x, y) = f(tx, ty), \forall t \neq 0$, temos que a equação é homogênea. Sendo assim, utilizamos a seguinte mudança de variável: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$y' = \frac{y(y + 3x)}{2x^2} = \frac{1}{2} \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} + 3 \right) \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{2}u(u + 3)$$

$$u'x = \frac{1}{2}(u^2 + 3u) - u = \frac{1}{2}(u^2 + u) \Rightarrow \int \frac{2du}{u(u + 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

Expandindo a função $\frac{1}{u(u+1)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{u(u + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u + 1}$$

$$A(u + 1) + Bu = 1 \Rightarrow A = 1, B = -1$$

$$\therefore \int \frac{du}{u(u + 1)} = \ln |u| - \ln |u + 1| = \ln \left(\frac{|u|}{|u + 1|} \right)$$

Sendo assim, temos:

$$2 \ln \left(\frac{|u|}{|u + 1|} \right) = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\ln \left(\left(\frac{|u|}{|u + 1|} \right)^2 \right) = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{u}{u+1}\right)^2 = e^C|x|, C \in \mathbb{R}$$

Portanto a solução da equação diferencial para $x \neq 0$ é dada implicitamente por:

$$\left(\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1}\right)^2 = K|x|, K > 0$$

$$\frac{y^2}{(y+x)^2} = K|x|, K > 0$$

Note que $y = -x$ não é solução. E que estamos tomando $x \neq 0$.

Aplicando a condição de contorno $y(1) = 1$:

$$\frac{1^2}{(1+1)^2} = K|1| \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

Portanto a solução é a função $y = y(x)$ dada implicitamente por $\frac{y^2}{(y+x)^2} = \frac{x}{4}$, para $x > 0$ ou explicitamente por $y = \frac{2x\sqrt{x} + x^2}{4-x}$.

- (b) Esta equação diferencial pode ser escrita como $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, sendo $P(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x$ e $Q(x, y) = yf(x)$. Podemos dizer que esta equação diferencial é exata se, e somente se, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Sendo assim, para que a equação seja exata, temos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y(f'(x) - 2 \operatorname{sen} x) = 0$$

$$\therefore f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow f(x) = -2 \cos x + C, C \in \mathbb{R}$$

Resolvendo a equação para $f(0) = -1 \Rightarrow f(x) = -2 \cos x + 1$, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 \operatorname{sen} x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y(-2 \cos x + 1) \end{cases}$$

Integrando em x a primeira equação:

$$\phi(x, y) = -y^2 \cos x + c(y)$$

Derivando em y :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2y \cos x + c'(y)$$

Comparando com a segunda equação:

$$c'(y) = y \Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2}$$

Sendo assim, temos:

$$\phi(x, y) = -y^2 \cos x + \frac{y^2}{2}$$

A solução geral da equação diferencial são as curvas de nível de $\phi(x, y)$, ou seja:

$$-y^2 \cos x + \frac{y^2}{2} = K, K \in \mathbb{R}$$

Questão 2: Seja $x > 0$.

- (a) Sabendo que $y_1(x) = x$ é solução da equação diferencial homogênea $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, determine outra solução linearmente independente de y_1 .
- (b) Obtenha a solução geral da equação diferencial $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2 + 1$

Solução:

- (a) Pode-se proceder procurando uma solução do tipo $y_2 = v(x)y_1 = v(x).x$, com v não contante. Notemos que para que $\{y_1, y_2\}$ seja L.I. temos que ter

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = v'y_1^2 \neq 0$$

Substituindo na equação, teremos $x^3v''(x) = (-4x^2)v'(x)$. Portanto, $v'(x) = x^{-4} + K$. Como podemos supor que $K=0$, temos que $v(x) = \frac{-1}{3x^3}$. Portanto, $y_2(x) = \frac{-1}{3x^2}$. Note que podemos escolher a função $y_2(x) = \frac{1}{x^2}$.

Notemos também que a equação diferencial em questão é uma equação de Euler, pois apresenta o seguinte formato:

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Sendo assim, sabe-se que a equação apresenta soluções no formato $y(x) = x^s, s \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^s \\ y'(x) &= sx^{s-1} \\ y''(x) &= s(s-1)x^{s-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$s(s-1)x^s + 2sx^s - 2x^s = 0 \Rightarrow x^s(s^2 + s - 2) = 0$$

A única maneira da equação ser respeitada para qualquer valor de x é se tivermos $s^2 + s - 2 = 0$. Assim:

$$s^2 + s - 2 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Sendo assim, obtemos 2 soluções linearmente independentes, $y_1(x) = x^{s_1} = x^1$ e $y_2(x) = x^{s_2} = x^{-2}$

- (b) A solução homogênea da equação é a combinação linear das duas soluções homogêneas, y_1 e y_2 :

$$y_h(x) = C_1x + C_2x^{-2}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar a solução geral da equação utilizamos o método da Variação dos Parâmetros para encontrar uma solução particular da equação da seguinte forma:

$$y_p(x) = u_1(x)x + u_2(x)x^{-2}$$

Aplicando o método:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & -2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x^2+1}{x^2} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ \frac{x^2+1}{x^2} & -2x^{-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & -2x^{-3} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x^2+1}{x^4}}{-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3x^2}$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{x^2+1}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & -2x^{-3} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{-\frac{3}{x^2}} = -\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}$$

Integrando:

$$u_1 = \frac{x}{3} - \frac{1}{3x}$$

$$u_2 = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{6}$$

$$\therefore y_p(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3x}\right)x + \left(-\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{6}\right)x^{-2} = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$$

A solução geral é a soma da solução homogênea com a solução particular:

$$y(x) = C_1x + C_2x^{-2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}, C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Questão 3:

- (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' + xy' + 2y = 0$ em série de potências centrada em 0 e dê o seu raio de convergência
- (b) Obtenha a solução geral da equação diferencial $y''' - 2y'' + y' = xe^{-x}$

Solução:

- (a) Suponha que a solução seja uma série de potências centrada em 0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n$$

É importante notar que:

$$xy' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n$$

Pois o primeiro termo da somatória começando em zero é 0. Assim, substituindo na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) + a_n n x^n + 2a_n] x^n = 0$$

Assim, chegamos na seguinte relação de recorrência:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n (n+2)}{(n+2)(n+1)} = -\frac{a_n}{n+1}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

É possível perceber que a sequência dos termos pares é independente da sequência dos termos ímpares. Analisando a sequência dos termos pares:

$$n = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{1}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3 \cdot 1}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_0}{5 \cdot 3 \cdot 1}$$

$$\therefore a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 1}$$

Analisando a sequência dos termos ímpares:

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{4} = \frac{a_1}{4 \cdot 2}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_7 = -\frac{a_5}{6} = -\frac{a_1}{6 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$\therefore a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 2}$$

Sendo assim a solução geral da equação é dada por:

$$y(x) = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 1} \right) + a_1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 2} \right), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Vamos analisar a convergência em função de x das duas séries obtidas. Aplicando o critério da razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1} \cdot \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 1}{x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+2) \cdot (2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 2}{x^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+2)} = 0$$

Pelo critério da razão, temos que as duas séries convergem para qualquer valor de x . Sendo assim, temos que o raio de convergência da solução da EDO por séries é infinito.

- (b) Primeiro vamos encontrar a solução da equação homogênea. Como a equação possui coeficientes constantes, temos que as soluções da equação homogênea são da forma $y(x) = e^{sx}$. Deverivando e substituindo na equação, obtemos o seguinte polinômio característico:

$$s^3 - 2s^2 + s = 0 \Rightarrow s(s-1)^2 = 0$$

Sendo assim, a solução da equação homogênea é dada por:

$$y_h(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar a solução geral da equação, iremos utilizar o Método dos Coeficientes a Determinar para encontrar uma solução particular. Como o termo não homogêneo é o produto de um polinômio de primeiro grau por uma exponencial e não há exponenciais com o mesmo argumento na solução homogênea, iremos buscar uma solução particular no seguinte formato:

$$y_p(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

Derivando:

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (-Ax + A - B)e^{-x} \\y_p''(x) &= -Ae^{-x} - (-Ax + A - B)e^{-x} = (Ax + B - 2A)e^{-x} \\y_p'''(x) &= Ae^{-x} - (Ax + B - 2A)e^{-x} = (-Ax + 3A - B)e^{-x}\end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned}(-Ax + 3A - B)e^{-x} - 2(Ax + B - 2A)e^{-x} + (-Ax + A - B)e^{-x} &= xe^{-x} \\ \Rightarrow -4Axe^{-x} + (8A - 4B)e^{-x} &= xe^{-x}\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} -4A = 1 \\ 8A - 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

A solução geral da equação é a soma da solução homogênea com a solução particular. Assim:

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2013 - 14/10/2013

Turma B

Questão 1: (3,5 pontos)

- (a) Determine a solução y da equação diferencial $2x^2y' = y(y+x)$ tal que $y(1) = -1$.
- (b) (i) Determine todas as funções $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tornam exata a equação diferencial $xf(y)dx + x^2 \operatorname{sen} y dy = 0$.
- (ii) Considere a função f tal que $f(0) = -1$ e encontre a solução geral da equação dada em (i).

Solução:

- (a) Isolando y' :

$$y' = \frac{y(y+x)}{2x^2} = f(x, y), x \neq 0$$

Como $f(x, y) = f(tx, ty), \forall t \neq 0$, temos que a equação é homogênea. Sendo assim, utilizamos a seguinte mudança de variável: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$y' = \frac{y(y+x)}{2x^2} = \frac{1}{2} \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} + 1 \right) \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{2} u(u+1)$$

$$u'x = \frac{1}{2}(u^2 + u) - u = \frac{1}{2}(u^2 - u) \Rightarrow \int \frac{2du}{u(u-1)} = \int \frac{dx}{x}$$

Expandindo a função $\frac{1}{u(u-1)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$

$$A(u-1) + Bu = 1 \Rightarrow A = -1, B = 1$$

$$\therefore \int \frac{du}{u(u-1)} = -\ln|u| + \ln|u-1|$$

Sendo assim, temos

$$2 \ln \left(\frac{|u|}{|u-1|} \right) = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\ln \left(\left(\frac{|u|}{|u-1|} \right)^2 \right) = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{u}{u-1}\right)^2 = e^C|x|, \quad C \in \mathbb{R}$$

Portanto a solução da equação diferencial para $x \neq 0$ é dada implicitamente por:

$$\left(\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}\right)^2 = K|x|, \quad K > 0$$

$$\frac{y^2}{(y-x)^2} = K|x|, \quad K > 0$$

Note que $y = x$ não é solução. E que estamos tomando $x \neq 0$.

Aplicando a condição de contorno $y(1) = -1$:

$$\frac{(-1)^2}{(-1-1)^2} = K|1| \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

Portanto a solução é a função $y = y(x)$ dada implicitamente por $\frac{y^2}{(y-x)^2} = \frac{x}{4}$, para $x > 0$ ou explicitamente por $\frac{x}{1-2\sqrt{x}}$

- (b) Esta equação diferencial pode ser escrita como $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, sendo $P(x, y) = xf'(y)$ e $Q(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$. Podemos dizer que esta equação diferencial é exata se, e somente se, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Sendo assim, para que a equação seja exata, temos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x(f'(y) - 2 \operatorname{sen} y) = 0$$

$$\therefore f'(y) = 2 \operatorname{sen} y \Rightarrow f(y) = -2 \cos y + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Resolvendo a equação para $f(0) = -1 \Rightarrow f(y) = -2 \cos y + 1$, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \operatorname{sen} y \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = x(-2 \cos y + 1) \end{cases}$$

Integrando em y a primeira equação:

$$\phi(x, y) = -x^2 \cos y + c(x)$$

Derivando em x :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2x \cos y + c'(x)$$

Comparando com a segunda equação:

$$c'(x) = x \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2}$$

Sendo assim, temos:

$$\phi(x, y) = -x^2 \cos y + \frac{x^2}{2}$$

A solução geral da equação diferencial são as curvas de nível de $\phi(x, y)$, ou seja:

$$-x^2 \cos y + \frac{x^2}{2} = K, K \in \mathbb{R}$$

Questão 2: Seja $x > 0$.

- (a) Sabendo que $y_1(x) = x$ é solução da equação diferencial homogênea $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$, determine outra solução linearmente independente de y_1 .
- (b) Obtenha a solução geral da equação diferencial $x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2 + 1$

Solução:

- (a) Pode-se proceder procurando uma solução do tipo $y_2 = v(x)y_1 = v(x).x$, com v não contante. Notemos que para que $\{y_1, y_2\}$ seja L.I. temos que ter

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = v'y_1^2 \neq 0$$

Substituindo na equação, teremos $x^3v''(x) = (-5x^2)v'(x)$. Portanto, $v'(x) = x^{-5} + K$. Como podemos supor que $K=0$, temos que $v(x) = \frac{-1}{4x^4}$. Portanto, $y_2(x) = \frac{-1}{4x^3}$. Note que podemos escolher a função $y_2(x) = \frac{1}{x^3}$.

Notemos também que a equação diferencial em questão é uma equação de Euler, pois apresenta o seguinte formato:

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Sendo assim, sabe-se que a equação apresenta soluções no formato $y(x) = x^s, s \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^s \\ y'(x) &= sx^{s-1} \\ y''(x) &= s(s-1)x^{s-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$s(s-1)x^s + 3sx^s - 3x^s = 0 \Rightarrow x^s(s^2 + 2s - 3) = 0$$

A única maneira da equação ser respeitada para qualquer valor de x é se tivermos $s^2 + 2s - 3 = 0$. Assim:

$$s^2 + 2s - 3 = 0 \Rightarrow s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

Sendo assim, obtemos 2 soluções linearmente independentes, $y_1(x) = x^{s_1} = x^1$ e $y_2(x) = x^{s_2} = x^{-3}$

- (b) A solução homogênea da equação é a combinação linear das duas soluções homogêneas, y_1 e y_2 :

$$y_h(x) = C_1x + C_2x^{-3}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar a solução geral da equação utilizamos o método da Variação dos Parâmetros para encontrar uma solução particular da equação da seguinte forma:

$$y_p(x) = u_1(x)x + u_2(x)x^{-3}$$

Aplicando o método:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & x^{-3} \\ 1 & -3x^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x^2+1}{x^2} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-3} \\ \frac{x^2+1}{x^2} & -3x^{-4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{-3} \\ 1 & -3x^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x^2+1}{x^5}}{-\frac{4}{x^3}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2}$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{x^2+1}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{-3} \\ 1 & -3x^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{-\frac{4}{x^3}} = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{4}$$

Integrando:

$$u_1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{4x}$$

$$u_2 = -\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{12}$$

$$\therefore y_p(x) = \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{4x}\right)x + \left(-\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{12}\right)x^{-3} = \frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}$$

A solução geral é a soma da solução homogênea com a solução particular:

$$y(x) = C_1x + C_2x^{-3} + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}, C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Questão 3:

- (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' + xy' + 2y = 0$ em série de potências centrada em 0 e dê o seu raio de convergência
- (b) Obtenha a solução geral da equação diferencial $y''' - 4y'' + 4y' = xe^{-x}$

Solução:

- (a) Suponha que a solução seja uma série de potências centrada em 0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n$$

É importante notar que:

$$xy' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n$$

Pois o primeiro termo da somatória começando em zero é 0.

Assim, substituindo na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n n x^n + 2a_n] x^n = 0$$

Assim, chegamos na seguinte relação de recorrência:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = -\frac{a_n}{n+1}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

É possível perceber que a sequência dos termos pares é independente da sequência dos termos ímpares. Analisando a sequência dos termos pares:

$$n = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{1}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3 \cdot 1}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_0}{5 \cdot 3 \cdot 1}$$

$$\therefore a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 1}$$

Analisando a sequência dos termos ímpares:

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{4} = \frac{a_1}{4 \cdot 2}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_7 = -\frac{a_5}{6} = -\frac{a_1}{6 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$\therefore a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 2}$$

Sendo assim a solução geral da equação é dada por:

$$y(x) = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 1} \right) + a_1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 2} \right), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Vamos analisar a convergência em função de x das duas séries obtidas. Aplicando o critério da razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1} \cdot \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 1}{x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+2) \cdot (2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 2}{x^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+2)} = 0$$

Pelo critério da razão, temos que as duas séries convergem para qualquer valor de x . Sendo assim, temos que o raio de convergência da solução da EDO por séries é infinito.

- (b) Primeiro vamos encontrar a solução da equação homogênea. Como a equação possui coeficientes constantes, temos que as soluções da equação homogênea são da forma $y(x) = e^{sx}$. Deverivando e substituindo na equação, obtemos o seguinte polinômio característico:

$$s^3 - 4s^2 + 4s = 0 \Rightarrow s(s-2)^2 = 0$$

Sendo assim, a solução da equação homogênea é dada por:

$$y_h(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar a solução geral da equação, iremos utilizar o Método dos Coeficientes a Determinar para encontrar uma solução particular. Como o termo não homogêneo é o produto de um polinômio de primeiro grau por uma exponencial e não há exponenciais com o mesmo argumento na solução homogênea, iremos buscar uma solução particular no seguinte formato:

$$y_p(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

Derivando:

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (-Ax + A - B)e^{-x} \\y_p''(x) &= -Ae^{-x} - (-Ax + A - B)e^{-x} = (Ax + B - 2A)e^{-x} \\y_p'''(x) &= Ae^{-x} - (Ax + B - 2A)e^{-x} = (-Ax + 3A - B)e^{-x}\end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned}(-Ax + 3A - B)e^{-x} - 4(Ax + B - 2A)e^{-x} + 4(-Ax + A - B)e^{-x} &= xe^{-x} \\ \Rightarrow -9Axe^{-x} + (15A - 9B)e^{-x} &= xe^{-x}\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} -9A = 1 \\ 15A - 9B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = -\frac{5}{27} \end{cases}$$

A solução geral da equação é a soma da solução homogênea com a solução particular. Assim:

$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} - \frac{1}{9}xe^{-x} - \frac{5}{27}e^{-x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$