Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2011 - 21/11/2011 **Turma A**

Questão 1. a) (1,0 ponto) Determine a solução geral da da equação $y' + \frac{1}{x}y = \cos x$.

b) (1,5 pontos) Determine a solução da equação $xy' = y+2xe^{-y/x}$ que satisfaz a condição inicial $y(1) = 2$.

c) (1,5 pontos) Determine a solução geral da da equação $y\,dx + (2x + 2xy + e^{-2y})\,dy = 0$.

Solução. a) Podemos escrever a equação dada na forma $xy' + y = x\cos x$, ou ainda, como

$$\frac{d}{dx}[xy] = x\cos x.$$

Integrando,

$$xy = \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y = \sin x + \frac{\cos x + C}{x},$$

onde C é uma constante arbitrária.

b) Escrevendo a equação dada na forma

$$y' = \frac{y}{x} + 2e^{-y/x},$$

verificamos imediatamente que se trata de uma equação homogênea. Portanto, a mudança $y = xu$ transforma a equação dada numa equação de variáveis separáveis. Substituindo, obtemos

$$u + x\frac{du}{dx} = u + 2e^{-u},$$

isto é,

$$e^u\,du = \frac{2}{x}\,dx.$$

Integrando, obtemos

$$e^u = 2\ln|x| + C$$

e portanto,

$$y = x\ln(2\ln|x| + C)$$

é a solução geral da equação dada. Para que $y(1) = 2$ devemos ter $2 = \ln C$, isto é $C = e^2$. Além disso, como o domínio da solução deve ser um intervalo contendo $x_0 = 1$, devemos ter $x > 0$. Logo, a solução é

$$y = x\ln(2\ln x + e^2)$$

definida no intervalo $(e^{-e^2/2}, +\infty)$.

.

c) Sejam $P(x, y) = y$ e $Q(x, y) = 2x + 2xy + e^{-2y}$. Como $P_y = 1$ e $Q_x = 2 + 2y$, a equação não é exata. Como $\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{1}{y} + 2$ depende apenas de y, a equação admite um fator intgrante que depende apenas de y. Seja $\mu = \mu(y)$ o fator integrante. Devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial y}(y\mu) = \frac{\partial}{\partial x}[(2x + 2xy + e^{-2y})\mu]$$

isto é,

$$\mu + y\mu'(y) = (2+2y)\mu.$$

Separando variáveis, obtemos

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{1}{y} + 2\right)\, dy$$

e então

$$\mu = e^{\ln|y| + 2y} = |y|e^{2y}.$$

Podemos portanto tomar $\mu = ye^{2y}$ como fator integrante. Multiplicando a equação dada por μ obtemos a equação exata

$$y^2 e^{2y}\, dx + (2xye^{2y} + 2xy^2e^{2y} + y)\, dy = 0,$$

cuja solução geral é dada por $F(x,y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e F satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y^2 e^{2y} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xye^{2y} + 2xy^2e^{2y} + y & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) com relação a x, concluimos que $F(x,y) = xy^2e^{2y} + K(y)$. Substituindo em (2), obtemos

$$2xye^{2y} + 2xy^2e^{2y} + K'(y) = 2xye^{2y} + 2xy^2e^{2y} + y,$$

e, portanto, $K(y) = y$. Assim, a solução geral da equação é dada por

$$xy^2e^{2y} + \frac{y^2}{2} = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Questão 2: (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Solução. Primeiro vamos determinar a solução geral da equação homogênea associada $y''-2y'+y=0$. Como se trata de uma equação linear com coeficientes constantes e $\lambda = 1$ é raiz dupla da equação característica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, a solução geral da equação homogênea associada é dada por

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias.

Agora, vamos usar o método de variação dos parametros para determinar uma solução particular da equação não homogênea. Tal solução tem a forma

$$y_p(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x,$$

onde $C_1(x)$ e $C_2(x)$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{1+x^2} \end{pmatrix}.$$

Subtraindo a primeira equação da segunda e dividindo por e^x, obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1'(x) + xC_2'(x) & = 0 \\ \\ C_2'(x) & = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

e, portanto, $C_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ e $C_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Logo,

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \qquad \text{e} \qquad C_2(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Assim,

$$y_p = -\frac{e^x}{2}\ln(1+x^2) + xe^x \operatorname{arctg} x$$

é uma solução particular e, portanto, a solução geral da equação é dada por

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{e^x}{2}\ln(1+x^2) + xe^x \operatorname{arctg} x,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Questão 3: (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 2x + e^{-x}.$$

Solução. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$ tem $\lambda = -1$ como raiz tripla e portanto

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 C_1 e^{-x}$$

é a solução geral da equação homogênea associada.

Para determinar uma solução particular y_p, vamos determinar uma solução particular y_{1p} e y_{2p} de cada uma das equações

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 2x \qquad (1)$$

e

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}, \qquad (2)$$

respectivamente, e tomar $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ (Princípio da Superposição).

Para a equação (1), vamos procurar y_{1p} da forma $y_{1p}(x) = Ax + B$. Substituindo, obtemos

$$3A + Ax + B = 2x$$

e, portanto, $A = 2$ e $B = -6$.

Para a equação (2), vamos procurar y_{2p} da forma $y_{2p}(x) = Dx^3 e^{-x}$. Temos

$$y_{2p}' = De^{-x}(3x^2 - x^3) \quad , \quad y_{2p}'' = De^{-x}(6x - 6x^2 + x^3) \quad , \quad y_{2p}''' = De^{-x}(6 - 18x + 9x^2 - x^3).$$

Substituindo, obtemos

$$De^{-x}[6 - 18x + 9x^2 - x^3 + 3(6x - 6x^2 + x^3) + 3(3x^2 - x^3) + x^3] = e^{-x}$$

e, portanto, $D = \frac{1}{6}$.

Logo, $y_p(x) = 2x - 6 + \frac{1}{6}x^3 e^{-x}$ é uma solução particular e a solução geral é dada por

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 C_1 e^{-x} + 2x - 6 + \frac{1}{6} x^3 e^{-x},$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2011 - 21/11/2011 Turma B

Questão 1. a) (1,0 ponto) Determine a solução geral da da equação $y' + \frac{1}{x}y = \operatorname{sen} x$.

b) (1,5 pontos) Determine a solução da equação $xy' = y + 3xe^{-y/x}$ que satisfaz a condição inicial $y(1) = 2$.

c) (1,5 pontos) Determine a solução geral da da equação $(2y + 2xy + e^{-2x})\,dx + x\,dy = 0$.

Solução. a) Podemos escrever a equação dada na forma $xy' + y = x\operatorname{sen} x$, ou ainda, como

$$\frac{d}{dx}[xy] = x\operatorname{sen} x.$$

Integrando,

$$xy = \int x\operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y = -\cos x + \frac{\operatorname{sen} x + C}{x},$$

onde C é uma constante arbitrária.

b) Escrevendo a equação dada na forma

$$y' = \frac{y}{x} + 3e^{-y/x},$$

verificamos imediatamente que se trata de uma equação homogênea. Portanto, a mudança $y = xu$ transforma a equação dada numa equação de variáveis separáveis. Substituindo, obtemos

$$u + x\frac{du}{dx} = u + 3e^{-u},$$

isto é,

$$e^u\,du = \frac{3}{x}\,dx.$$

Integrando, obtemos

$$e^u = 3\ln|x| + C$$

e portanto,

$$y = x\ln(3\ln|x| + C)$$

é a solução geral da equação dada. Para que $y(1) = 2$ devemos ter $2 = \ln C$, isto é $C = e^2$. Além disso, como o domínio da solução deve ser um intervalo contendo $x_0 = 1$, devemos ter $x > 0$. Logo, a solução é

$$y = x\ln(3\ln x + e^2)$$

definida no intervalo $(e^{-e^2/3}, +\infty)$.

.

c) Sejam $P(x,y) = 2y + 2xy + e^{-2x}$ e $Q(x,y) = x$. Como $P_y = 2 + 2x$ e $Q_x = 1$, a equação não é exata. Como $\frac{Q_x - P_y}{Q} = -\frac{1}{x} + 2$ depende apenas de y, a equação admite um fator intgrante que depende apenas de x. Seja $\mu = \mu(x)$ o fator integrante. Devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial y}[(2y + 2xy + e^{-2x})\mu] = \frac{\partial}{\partial x}[x\mu]$$

isto é,

$$\mu + x\mu'(x) = (2 + 2x)\mu.$$

Separando variáveis, obtemos

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx$$

e então

$$\mu = e^{\ln|x| + 2x} = |x|e^{2x}.$$

Podemos portanto tomar $\mu = xe^{2x}$ como fator integrante. Multiplicando a equação dada por μ obtemos a equação exata

$$(2xye^{2x} + 2xy^2e^{2x} + x)\,dx + x^2e^{2x}\,dy = 0,$$

cuja solução geral é dada por $F(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e F satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x} + x & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2e^{2x} & (2) \end{cases}$$

Integrando (2) com relação a y, concluimos que $F(x, y) = x^2ye^{2x} + K(x)$. Substituindo em (1), obtemos

$$2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x} + K'(x) = 2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x} + x,$$

e, portanto, $K(x) = \frac{x^2}{2}$. Assim, a solução geral da equação é dada por

$$x^2ye^{2x} + \frac{x^2}{2} = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Questão 2: (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}.$$

Solução. Primeiro vamos determinar a solução geral da equação homogênea associada $y''+2y'+y = 0$. Como se trata de uma equação linear com coeficientes constantes e $\lambda = -1$ é raiz dupla da equação característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, a solução geral da equação homogênea associada é dada por

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias.

Agora, vamos usar o método de variação dos parametros para determinar uma solução particular da equação não homogênea. Tal solução tem a forma

$$y_p(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x},$$

onde $C_1(x)$ e $C_2(x)$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-x}}{1+x^2} \end{pmatrix}.$$

Somando as equações e dividindo por e^{-x}, obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1'(x) + xC_2'(x) & = 0 \\ \\ C_2'(x) & = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

e, portanto, $C_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ e $C_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Logo,

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \qquad \text{e} \qquad C_2(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Assim,

$$y_p = -\frac{e^{-x}}{2}\ln(1+x^2) + xe^{-x}\operatorname{arctg} x$$

é uma solução particular e, portanto, a solução geral da equação é dada por

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{e^{-x}}{2}\ln(1+x^2) + xe^{-x}\operatorname{arctg} x,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Questão 3: (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3x + e^x.$$

Solução. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$ tem $\lambda = 1$ como raiz tripla e portanto

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 C_1 e^x$$

é a solução geral da equação homogênea associada.

Para determinar uma solução particular y_p, vamos determinar uma solução particular y_{1p} e y_{2p} de cada uma das equações

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3x \qquad (1)$$

e

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, \qquad (2)$$

respectivamente, e tomar $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ (Princípio da Superposição).

Para a equação (1), vamos procurar y_{1p} da forma $y_{1p}(x) = Ax + B$. Substituindo, obtemos

$$3A - Ax - B = 3x$$

e, portanto, $A = -3$ e $B = -9$.

Para a equação (2), vamos procurar y_{2p} da forma $y_{2p}(x) = Dx^3 e^x$. Temos

$$y'_{2p} = De^x(3x^2 + x^3) \quad , \quad y''_{2p} = De^x(6x + 6x^2 + x^3) \quad , \quad y'''_{2p} = De^x(6 + 18x + 9x^2 + x^3).$$

Substituindo, obtemos

$$De^x[6 + 18x + 9x^2 + x^3 - 3(6x + 6x^2 + x^3) + 3(3x^2 + x^3) - x^3] = e^x$$

e, portanto, $D = \frac{1}{6}$.

Logo, $y_p(x) = -3x - 9 + \frac{1}{6}x^3 e^x$ é uma solução particular e a solução geral é dada por

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 C_1 e^x - 3x - 9 + \frac{1}{6}x^3 e^x,$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.