Turma A

MAT 2456 Cálculo diferencial e Integral para Engenharia IV.
Escola politecnica 2da prova 15/10/2012

Nome : _____
Nro. USP : _____
Professor : _____
Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

1. **Questão 1**

   (a) $(1,5)$Determine a expansão em série de potencias em torno de $x_0 = 0$ da função $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ e encontre os valores de x para os quais a expansão é valida.

   (b) $(1,5)$ Calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+x^2\right) dx$ com erro menor que 10^{-4}

Solução 1 *a) Integrando a série geométrica*

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \ , \qquad \forall t \in (-1,1) \ ,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+x^2\right) &= \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x^2} (-1)^n t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)} \right|_0^{x^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1} \ .
\end{aligned}$$

Como o raio de convergência de uma série de potências é preservado por integração, sabemos que a expansão acima é válida pelo menos para $0 < x^2 < 1$, ou seja, para $-1 < x < 1$. Além disto, a série diverge se $|x| > 1$. Resta verificar o que acontece quando $x = 1$ ou $x = -1$.

Para estes valores de x, a série vale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Esta é uma série alternada que converge pelo critério de Leibniz. Como as séries de potências são contínuas em seu intervalo de convergência, e a função ln *é contínua em* 2*, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ e portanto*

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}, \qquad \forall x \in [-1,1] \ .$$

b) Como $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [-1,1]$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+x^2\right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+3)} \right|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)\, 2^{2n+3}} \ .
\end{aligned}$$

Esta é uma série alternada que converge pelo critério de Leibniz, pois a sequencia

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(2n+3)\,2^{2n+3}}$$

claramente satisfaz $a_n > 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, e além disto ela é decrescente* ($a_{n+1} \leq a_n$)*, já que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad = \quad \frac{n+1}{n+2}.\frac{2n+3}{2n+5}.\frac{1}{2^2} \leq 1 \ .$$

Podemos então usar a estimativa do erro para uma série que converge pelo critério de Leibniz:

$$erro = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)\,2^{2n+3}} \right| < a_{N+1} = \frac{1}{(N+2)(2N+5)\,2^{2N+5}} \ .$$

Logo, para obter uma aproximação com erro menor que 10^{-4}*, devemos tomar* N *tal que* $a_{N+1} < 10^{-4}$*, ou seja, tal que*

$$(N+2)(2N+5)\,2^{2N+5} > 10^4 \ .$$

Por uma simples inspeção, vemos que para $N = 1$ *tal desigualdade é satisfeita, e portanto*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+x^2\right) dx \approx \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)\,2^{2n+3}} = \frac{1}{24} - \frac{1}{320} + \frac{1}{2688} \ .$$

2. Questão 2

Seja $f(x) = x^2 - 1$, $x \in (0, \pi)$.

(a) $(1,5)$ Determine a série de Fourier de senos de f

(b) $(1,5)$ Mostre que a série de Fourier de senos de f converge para uma função $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e esboçe o grafico de S no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

(c) $(0,5)$ Determine $S\left(\frac{1863\pi}{2}\right)$.

Solução 2 .

(a) Denotamos por f a extensão impar de f ao eixo real. Então se $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ é a seriede fourier de f, temos

$$a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(x^2 - 1\right) \sin(nx)\, dx \end{aligned}$$

como

$$\int \left(1 - x^2\right) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{n^3} \left(2 \cos nx + n^2 \cos nx - n^2 x^2 \cos nx + 2nx \sin nx\right)$$

Então

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - x^2\right) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{1}{n^3} \left(2 \cos \pi n + n^2 \cos \pi n - \pi^2 n^2 \cos \pi n\right) \right) - \left(\frac{1}{n^3} \left(n^2 + 2\right) \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{1}{n^3} \left(2 (-1)^n + n^2 (-1)^n - \pi^2 n^2 (-1)^n\right) \right) - \left(\frac{1}{n^3} \left(n^2 + 2\right) \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n n^2 + 2(-1)^n - n^2 - (-1)^n \pi^2 n^2 - 2}{n^3} \end{aligned} \tag{1}$$

logo

$$SFf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

com b_n como em 1.

(b) A extensão da função $f(x) = x^2 - 1$ é uma função seccionalmente continua, e seccionalmente de classe C^1, logo a serie de fourier converge a esta extensão em todo $x \in \mathbb{R}$ exeto nos ponto onde f for discontínua.

(c) Sendo f contínua em $x = \frac{\pi}{2}$ temos

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{1863\pi}{2}\right) &= S\left(465\,(2\pi) + \frac{3\pi}{2}\right) \\
&= S\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\
&= S\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) \\
&= S\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(-\frac{1}{2}\pi\right) \\
&= 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}\pi^2
\end{aligned}$$

3. Questão 3

(a) $(1,5)$Sabendo que a série de Fourier de $f(x) = |\sin x|$, $x \in (-\pi, \pi)$ é

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2}$$

determine

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

(b) (2) Seja $I = \int_{-\pi}^{\pi} [x + |x| - (A + B\sin 2x) + C\cos 2x]^2 \, dx$, encontre A, B, C que minimize I.

Solução 3 *Temos*

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2} = S(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\left(1-(2k)^2\right)} \cos(2kx)$$

donde $\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$, $a_{2k} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}$,, $k \geq 1$.

(a) Por Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Logo sendo $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$, $b_n = 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\right)^2$$

donde

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

como $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 1$, *então*

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{1-\frac{8}{\pi^2}}{\frac{16}{\pi^2}} = \frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{2}$$

(b) Por teoria os coeficientes A, B, C correspondem a os coeficintes de Fourier.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_0}{2} \\ B &= b_2 \\ C &= a_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x-|x|)\,dx = -\pi \\
a_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x-|x|)\cos(2x)\,dx = 0 \\
b_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x-|x|)\sin(2x)\,dx = -1
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{\pi}{2} \\
C &= 0 \\
B &= -1
\end{aligned}$$

Turma B

MAT 2456 Cálculo diferencial e Integral para Engenharia IV.
Escola politecnica 2da prova 15/10/2012

Nome : _____
Nro. USP : _____
Professor : _____
Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

1. **Questão 1**

   (a) $(1,5)$Determine a expansão em série de potencias em torno de $x_0 = 0$ da função $f(x) = \ln\left(1+x^4\right)$ e encontre os valores de x para os quais a expansão é valida.

   (b) $(1,5)$ Calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+x^4\right) dx$ com erro menor que 10^{-4}

Solução 1 *a) Integrando a série geométrica*

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \ , \qquad \forall t \in (-1,1) \ ,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+x^4\right) &= \int_0^{x^4} \frac{1}{1+t} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x^4} (-1)^n t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)} \right|_0^{x^4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+4}}{n+1} \ .
\end{aligned}$$

Como o raio de convergência de uma série de potências é preservado por integração, sabemos que a expansão acima é válida pelo menos para $0 < x^4 < 1$, ou seja, para $-1 < x < 1$. Além disto, a série diverge se $|x| > 1$. Resta verificar o que acontece quando $x = 1$ ou $x = -1$.

Para estes valores de x, a série vale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Esta é uma série alternada que converge pelo critério de Leibniz. Como as séries de potências são contínuas em seu intervalo de convergência, e a função $\ln$ é contínua em 2, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ e portanto

$$\ln\left(1+x^4\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+4}}{n+1}, \qquad \forall x \in [-1,1] \ .$$

b) Como $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [-1,1]$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+x^4\right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n x^{4n+4}}{n+1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{(-1)^n x^{4n+5}}{(n+1)(4n+5)} \right|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(4n+5)\, 2^{4n+5}} \ .
\end{aligned}$$

Esta é uma série alternada que converge pelo critério de Leibniz, pois a sequencia

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\,(4n+5)\,2^{4n+5}}$$

claramente satisfaz $a_n > 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, e além disto ela é decrescente* ($a_{n+1} \leq a_n$)*, já que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad = \quad \frac{n+1}{n+2}.\frac{4n+5}{4n+9}.\frac{1}{2^4} \leq 1 \ .$$

Podemos então usar a estimativa do erro para uma série que converge pelo critério de Leibniz:

$$erro = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\,(4n+5)\,2^{4n+5}} \right| < a_{N+1} = \frac{1}{(N+2)\,(4N+9)\,2^{4N+9}} \ .$$

Logo, para obter uma aproximação com erro menor que 10^{-4}*, devemos tomar* N *tal que* $a_{N+1} < 10^{-4}$*, ou seja, tal que*

$$(N+2)\,(4N+9)\,2^{4N+9} > 10^4 \ .$$

Por uma simples inspeção, vemos que para $N = 1$ *tal desigualdade é satisfeita, e portanto*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+x^4\right) dx \approx \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(n+1)\,(4n+5)\,2^{4n+5}} = \frac{1}{160} - \frac{1}{9216} \ .$$

2. Questão 2

Seja $f(x) = 1 - x^2$, $x \in (0, \pi)$.

(a) $(1,5)$ Determine a série de Fourier de senos de f

(b) $(1,5)$ Mostre que a série de Fourier de senos de f converge para uma função $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e esboçe o grafico de S no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

(c) $(0,5)$ Determine $S\left(\frac{1863\pi}{2}\right)$.

Solução 2 .

(a) Denotamos por f a extensão impar de f ao eixo real. Então se $\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ é a serie de fourier de f, temos

$$a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - x^2\right) \sin(nx)\, dx \end{aligned}$$

como

$$\int \left(1 - x^2\right) \sin(nx)\, dx = -\frac{1}{n^3} \left(2 \cos nx + n^2 \cos nx - n^2 x^2 \cos nx + 2nx \sin nx\right)$$

Então

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - x^2\right) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n^3} \left(2 \cos \pi n + n^2 \cos \pi n - \pi^2 n^2 \cos \pi n\right) \right) - \left(-\frac{1}{n^3} \left(n^2 + 2\right) \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n^3} \left(2 (-1)^n + n^2 (-1)^n - \pi^2 n^2 (-1)^n\right) \right) - \left(-\frac{1}{n^3} \left(n^2 + 2\right) \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi n^3} \left[\left(- \left(2 (-1)^n + n^2 (-1)^n - \pi^2 n^2 (-1)^n\right) \right) - \left(-1 \left(n^2 + 2\right) \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi n^3} \left[\left(n^2 - 2 (-1)^n - (-1)^n n^2 + (-1)^n \pi^2 n^2 + 2\right) \right] \qquad (1) \end{aligned}$$

logo

$$SFf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

com b_n como em 1

(b) A extensão da função $f(x) = 1 - x^2$ é uma função seccionalmente continua, e seccionalmente de classe C^1, logo a serie de fourier converge a esta extensão em todo $x \in \mathbb{R}$ exeto nos pontos onde f for discontínua.

(c) Sendo f é continua em $x = -\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{1863\pi}{2}\right) &= S\left(465\,(2\pi) + \frac{3\pi}{2}\right) \\
&= S\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\
&= S\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) \\
&= S\left(-\frac{1}{2}\pi\right) \\
&= f\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1,
\end{aligned}$$

3. Questão 3

(a) $(1,5)$Sabendo que a série de Fourier de $f(x) = |\sin x|$, $x \in (-\pi, \pi)$ é

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2}$$

determine

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

(b) (2) Seja $I = \int_{-\pi}^{\pi} [x + |x| - (A + B\sin 3x + C\cos 3x)]^2 \, dx$, encontre A, B, C que minimize I.

Solução 3 *Temos*

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2} = S(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\left(1-(2k)^2\right)} \cos(2kx)$$

Donde $b_n = 0$, $\forall n$, $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_{2k} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}$, $k \geq 1$.

(a) Por parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

e

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\right)^2$$

donde

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

como $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 1$, *então*

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{1-\frac{8}{\pi^2}}{\frac{16}{\pi^2}} = \frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{2}$$

(b) Por teoria as constantes A, B, C *correspondem a os coeficientes de Fourier*

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_0}{2} \\ B &= b_3 \\ C &= a_3 \end{aligned}$$

Agora

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|)\,dx = \pi$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+|x|)\cos(3x)\,dx = -\frac{4}{9\pi} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_3 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+|x|)\sin(3x)\,dx = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{2} \\
B &= \frac{2}{3} \\
C &= -\frac{4}{9\pi}
\end{aligned}
$$