Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2017 - 17/10/2017

Turma A

1ª Questão: Seja $f(x) = e^x - 2,\ x \in (0, \pi]$.

a) (1,5) Determine a série de senos de f.

b) (1,0) Encontre a soma $S(x)$ da série de senos de f e esboce o seu gráfico no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

c) (0,5) Determine $S\left(\frac{2117\pi}{2}\right)$.

Solução:

a) Seja $\tilde{f}(x)$ a extensão ímpar de $f(x)$. A série de Fourier de $\tilde{f}(x)$ é a série de senos de $f(x)$. Sendo assim, temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = 0 \text{ (função ímpar)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(nx)\,dx = 0 \text{ (função ímpar)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(e^x - 2)\sin(nx)\,dx \text{ (função par)}$$

Definindo:

$$I_n = \int_0^{\pi} e^x \sin(nx)\,dx$$

Temos:

$$I_n = \int_0^{\pi} e^x \frac{d}{dx}\Big(\frac{-\cos(nx)}{n}\Big)\,dx = -\frac{e^x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{1 - e^{\pi}(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x \frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin(nx)}{n}\Big)\,dx = \frac{1 - e^{\pi}(-1)^n}{n} + \frac{e^x\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}I_n$$

$$\therefore I_n = \frac{n}{n^2+1}(1 - e^{\pi}(-1)^n)$$

Assim:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big(I_n - 2\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(I_n + \frac{2\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{n}{n^2+1}\big(1 - e^{\pi}(-1)^n\big) + \frac{2}{n}\big((-1)^n - 1\big)\Big)$$

$$\therefore S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n}{n^2+1}\big(1 - e^{\pi}(-1)^n\big) + \frac{2}{n}\big((-1)^n - 1\big)\Big)\sin(nx)$$

b) Como a extensão ímpar $\tilde{f}$ de f é de classe C^1, pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier, temos que $S(x)$ converge para:

- Para $x \in (-\pi, \pi)$:
  - $\tilde{f}(x)$, onde $\tilde{f}(x)$ é contínua
  - $\frac{\tilde{f}(x^+)+\tilde{f}(x^-)}{2} = 0$, onde $\tilde{f}(x)$ é descontínua
- $\dfrac{\tilde{f}(\pi)+\tilde{f}(-\pi)}{2} = 0$, para $x = \pi$ ou $x = -\pi$
- Para $x \notin [-\pi, \pi]$: repete-se periodicamente.

Assim:

$$S(x) = \begin{cases} e^x - 2, & 0 < x < \pi \\ 2 - e^{-x}, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0; \pm\pi \end{cases}$$

$$S(2k\pi + x) = S(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}$$

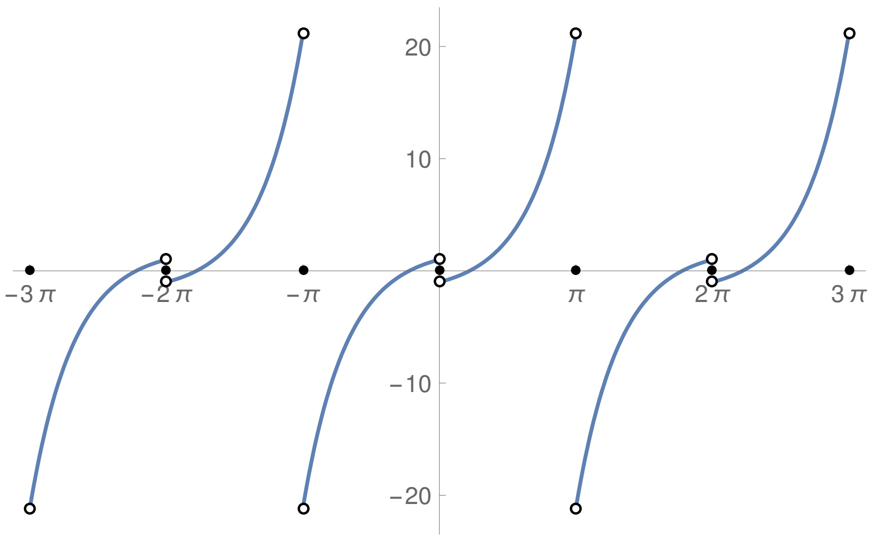

Figura 1: Série de Senos de $f(x)$ para $x \in [-3\pi, 3\pi]$

c)

$$S\left(\frac{2117\pi}{2}\right) = S\left(529(2\pi) + \frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

2ª Questão:

a) (1,5) Sabendo que a série de Fourier de $f(x) = \dfrac{x^3 - \pi^2 x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \sin(nx),$$

determine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

b) (1,0) Seja $I(c_1, c_2, c_3) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left[x - \sum_{k=1}^{3} c_k \sin(kx) \right]^2 dx$. Determine c_1, c_2, c_3 que minimizam I.

Solução:

a) Sabe-se que os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$ são:

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = (-1)^n \frac{4}{n^3}$$

Aplicando a identidade de Parseval:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^6} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{x^3 - \pi^2 x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x^6 - 2\pi^2 x^4 + \pi^4 x^2)\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^7}{7} - \frac{2\pi^2 x^5}{5} + \frac{\pi^4 x^3}{3} \right)_0^{\pi} = \frac{4\pi^7}{105}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{4\pi^7}{105} = \frac{\pi^6}{420}$$

b) Para que I seja minimizado, os valores de c_1, c_2 e c_3 devem corresponder aos valores de b_1, b_2 e b_3 associados à serie de Fourier de $f(x) = x$. Ou seja:

$$\min_{c_1, c_2, c_3} \int_{-\pi}^{\pi} \left[x - \sum_{k=1}^{3} c_k \sin(kx) \right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[x - \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx) \right]^2 dx$$

Onde

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\frac{d}{dx}\Big(\frac{-\cos(kx)}{k}\Big)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{x\cos(kx)}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(kx)\,dx\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

$$\therefore c_1 = b_1 = 2,\ c_2 = b_2 = -1,\ c_3 = b_3 = 2/3$$

3ª Questão:

a) (2,5) Determine a série de Taylor da função $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x^2}{2-x^2}\right)$ em torno do ponto $x = 0$. Qual é o raio da convergência dela?

b) (2,0) Ache o valor aproximado da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$ com erro inferior a 10^{-3}.

Solução:

a) Note que $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x^2}{2-x^2}\right) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)$

Consideremos:

$$g(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln(1+y) - \ln(1-y)$$

Derivando $g(y)$, temos:

$$g'(y) = \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n + \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\big((-1)^n + 1\big)y^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2y^{2n},\ |y| < 1$$

Assim,

$$g(y) = \int g'(y)\,dy = \int \sum_{n=0}^{\infty} 2y^{2n}\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2y^{2n+1}}{2n+1} + C,\ |y| < 1$$

Calculando em $y = 0$:

$$g(0) = \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Portanto

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2y^{2n+1}}{2n+1},\ |y| < 1$$

Sendo assim, temos:

$$f(x) = g\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(\frac{x^2}{2})^{2n+1}}{2n+1},\ |x^2/2| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{4^n\,(2n+1)},\ |x| < \sqrt{2}$$

Raio de convergência: $R = \sqrt{2}$

b) Sabe-se que:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo assim:

$$\cos x - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \,, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{\cos x - 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!} \,, \forall x \neq 0$$

Portanto:

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n)!}$$

Deseja-se obter a soma da série obtida com $|erro| < \varepsilon = 10^{-3}$. Sabe-se que:

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \simeq \sum_{n=1}^{k} (-1)^n a_n$$

O erro da aproximação é dado por:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Sendo

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n)!} > 0, \; \forall n \geq 1$$

Como a série é alternada, o erro pode ser estimado por:

$$|erro| < a_{k+1}$$

Então, basta achar k tal que $a_{k+1} < \varepsilon$:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)!} < 10^{-3}$$

$$(2k+1)(2k+2)! > 10^3$$

Para $k = 2$:

$$(2k+1)(2k+2)! = 5 \cdot 6! = 5 \cdot 720 > 10^3$$

Portanto:

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx \simeq \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n)!} = -\frac{1}{1\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 4!} = -\frac{35}{72}$$

Com $|erro| < 10^{-3}$.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2017 - 17/10/2017

Turma B

1ª Questão: Seja $f(x) = e^x - 3,\ x \in (0, \pi]$.

a) (1,5) Determine a série de senos de f.

b) (1,0) Encontre a soma $S(x)$ da série de senos de f e esboce o seu gráfico no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

c) (0,5) Determine $S\left(\frac{4235\pi}{4}\right)$.

Solução:

a) Seja $\tilde{f}(x)$ a extensão ímpar de $f(x)$. A série de Fourier de $\tilde{f}(x)$ é a série de senos de $f(x)$. Sendo assim, temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = 0 \text{ (função ímpar)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(nx)\,dx = 0 \text{ (função ímpar)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(e^x - 3)\sin(nx)\,dx \text{ (função par)}$$

Definindo:

$$I_n = \int_0^{\pi} e^x \sin(nx)\,dx$$

Temos:

$$I_n = \int_0^{\pi} e^x \frac{d}{dx}\Big(\frac{-\cos(nx)}{n}\Big)\,dx = -\frac{e^x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{1 - e^{\pi}(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x \frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin(nx)}{n}\Big)\,dx = \frac{1 - e^{\pi}(-1)^n}{n} + \frac{e^x\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}I_n$$

$$\therefore I_n = \frac{n}{n^2+1}(1 - e^{\pi}(-1)^n)$$

Assim:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big(I_n - 3\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(I_n + \frac{3\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{n}{n^2+1}\big(1 - e^{\pi}(-1)^n\big) + \frac{3}{n}\big((-1)^n - 1\big)\Big)$$

$$\therefore S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n}{n^2+1}\big(1 - e^{\pi}(-1)^n\big) + \frac{3}{n}\big((-1)^n - 1\big)\Big)\sin(nx)$$

b) Como a extensão ímpar $\tilde{f}$ de f é de classe C^1, pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier, temos que $S(x)$ converge para:

- Para $x \in (-\pi, \pi)$:
  - $\tilde{f}(x)$, onde $\tilde{f}(x)$ é contínua
  - $\frac{\tilde{f}(x^+)+\tilde{f}(x^-)}{2} = 0$, onde $\tilde{f}(x)$ é descontínua
- $\dfrac{\tilde{f}(\pi)+\tilde{f}(-\pi)}{2} = 0,$ para $x = \pi$ ou $x = -\pi$
- Para $x \notin [-\pi, \pi]$: repete-se periodicamente.

Assim:

$$S(x) = \begin{cases} e^x - 3, & 0 < x < \pi \\ 3 - e^{-x}, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0; \pm\pi \end{cases}$$

$$S(2k\pi + x) = S(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}$$

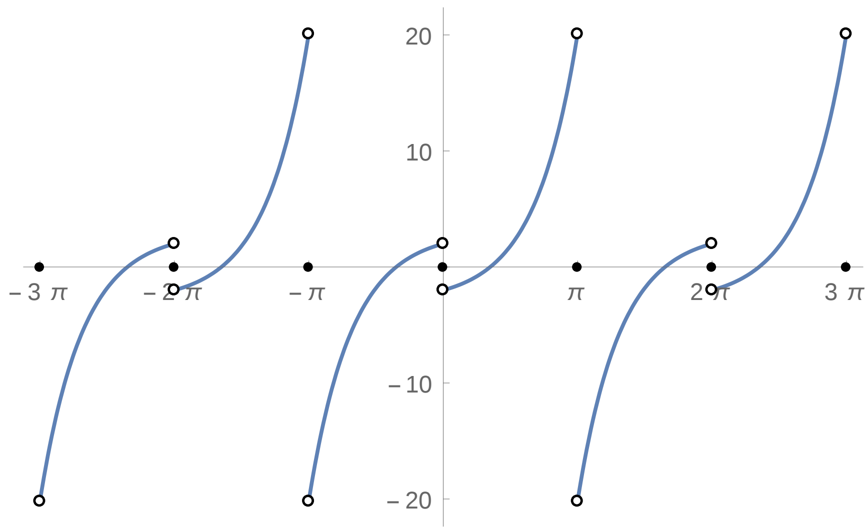

Figura 2: Série de Senos de $f(x)$ para $x \in [-3\pi, 3\pi]$

c)

$$S\left(\frac{4235\pi}{4}\right) = S\left(529(2\pi) + \frac{3\pi}{4}\right) = S\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tilde{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} - 3$$

2ª Questão:

a) (1,5) Sabendo que a série de Fourier de $f(x) = \dfrac{x^3 - \pi^2 x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \sin(nx),$$

determine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

b) (1,0) Seja $I(c_1, c_2, c_3) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left[x - \sum_{k=1}^{3} c_k \sin(kx) \right]^2 dx$. Determine c_1, c_2, c_3 que minimizam I.

Solução:

a) Sabe-se que os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$ são:

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = (-1)^n \frac{4}{n^3}$$

Aplicando a identidade de Parceval:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^6} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{x^3 - \pi^2 x}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x^6 - 2\pi^2 x^4 + \pi^4 x^2)\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^7}{7} - \frac{2\pi^2 x^5}{5} + \frac{\pi^4 x^3}{3} \right)_0^{\pi} = \frac{4\pi^7}{105}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{4\pi^7}{105} = \frac{\pi^6}{420}$$

b) Para que I seja minimizado, os valores de c_1, c_2 e c_3 devem corresponder aos valores de b_1, b_2 e b_3 associados à serie de Fourier de $f(x) = x$. Ou seja:

$$\min_{c_1, c_2, c_3} \int_{-\pi}^{\pi} \left[x - \sum_{k=1}^{3} c_k \sin(kx) \right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[x - \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx) \right]^2 dx$$

Onde

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\frac{d}{dx}\Big(\frac{-\cos(kx)}{k}\Big)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{x\cos(kx)}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(kx)\,dx\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

$$\therefore c_1 = b_1 = 2,\ c_2 = b_2 = -1,\ c_3 = b_3 = 2/3$$

3ª Questão:

a) (2,5) Determine a série de Taylor da função $f(x) = \ln\left(\dfrac{3+x^2}{3-x^2}\right)$ em torno do ponto $x = 0$. Qual é o raio da convergência dela?

b) (2,0) Ache o valor aproximado da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x - x}{x^3} dx$ com erro inferior a 10^{-3}.

Solução:

a) Note que $f(x) = \ln\left(\dfrac{3+x^2}{3-x^2}\right) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{x^2}{3}}{1-\frac{x^2}{3}}\right)$

Consideremos:

$$g(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln(1+y) - \ln(1-y)$$

Derivando $g(y)$, temos:

$$g'(y) = \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n + \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\big((-1)^n + 1\big)y^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2y^{2n}, \ |y| < 1$$

Assim,

$$g(y) = \int g'(y)\,dy = \int \sum_{n=0}^{\infty} 2y^{2n}\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2y^{2n+1}}{2n+1} + C, \ |y| < 1$$

Calculando em $y = 0$:

$$g(0) = \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Portanto

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2y^{2n+1}}{2n+1}, \ |y| < 1$$

Sendo assim, temos:

$$f(x) = g\left(\frac{x^2}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(\frac{x^2}{3})^{2n+1}}{2n+1}, \ |x^2/3| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{x^{4n+2}}{9^n\,(2n+1)}, \ |x| < \sqrt{3}$$

Raio de convergência: $R = \sqrt{3}$

b) Sabe-se que:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\, , \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo assim:

$$\sin x - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\, , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{\sin x - x}{x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n+1)!}\, , \forall x \neq 0$$

Portanto:

$$\int_0^1 \frac{\sin x - x}{x^3}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n+1)!}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)!}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)!}$$

Deseja-se obter a soma da série obtida com $|erro| < \varepsilon = 10^{-3}$. Sabe-se que:

$$\int_0^1 \frac{\sin x - x}{x^3}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \simeq \sum_{n=1}^{k} (-1)^n a_n$$

O erro da aproximação é dado por:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Sendo

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)!} > 0,\ \forall n \geq 1$$

Como a série é alternada, o erro pode ser estimado por:

$$|erro| < a_{k+1}$$

Então, basta achar k tal que $a_{k+1} < \varepsilon$:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)!} < 10^{-3}$$

$$(2k+1)(2k+3)! > 10^3$$

Para $k = 2$:

$$(2k+1)(2k+3)! = 5 \cdot 7! = 5 \cdot 5040 > 10^3$$

Portanto:

$$\int_0^1 \frac{\sin x - x}{x^3}\,dx \simeq \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)!} = -\frac{1}{1\cdot 3!} + \frac{1}{3\cdot 5!} = -\frac{59}{360}$$

Com $|erro| < 10^{-3}$.