Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2016 - 18/10/2016

Turma A
Questão 1: (2,5 pontos) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida de forma recorrente por $x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\Big)$, para $n > 1$ e $x_1 = 2$.

a) Supondo que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, calcule seu limite.

b) Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e decrescente.

c) Justifique por que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Solução:

(a) Supondo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Para $n > 1$ $x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\Big) \Leftrightarrow 2x_nx_{n-1} = x_{n-1}^2 + 3$. Sendo assim, aplicando o limite na expressão temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 2x_nx_{n-1} &= \lim_{n\to\infty}(x_{n-1}^2 + 3) \\ 2L^2 &= (L^2 + 3) \\ L^2 &= 3 \\ L &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $L = \sqrt{3}$ provando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos positivos. Aplicando o Princípio da Indução Finita, temos:

i) $x_1 = 2 > 0$

ii) Supondo que $x_n > 0$ temos que $x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{3}{x_n}\Big) > 0$

Portanto, $x_n > 0\ \forall n \geq 1$ e consequentemente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \sqrt{3}$

(b) Sabendo que $x_n > 0\ \forall n \geq 1$, vamos mostrar que $x_n \leq x_{n-1}\ \forall n > 1$.

$$x_n \leq x_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_{n-1} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\Big) - x_{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{x_{n-1}}{2} + \frac{3}{2x_{n-1}} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -x_{n-1}^2 + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x_{n-1} \geq \sqrt{3}$$

Sendo assim, temos que $x_n - x_{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow x_{n-1} \geq \sqrt{3}\ \forall n > 1$, ou seja, se provarmos que a sequência é limitada inferiomente por $\sqrt{3}$, provamos que a sequência é decrescente.

Vamos provar por absurdo que $x_n \geq \sqrt{3}\ \forall n \geq 1$. Suponha que $x_m < \sqrt{3}$ para algum m:

$$x_m < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(x_{m-1} + \frac{3}{x_{m-1}}\Big) < \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x_{m-1}^2 + 3 < 2\sqrt{3}x_{m-1} \Leftrightarrow x_{m-1}^2 - 2\sqrt{3}x_{m-1} + 3 < 0$$
$$(x_{m-1} - \sqrt{3})^2 < 0$$

Sendo assim, é impossível que $x_n < \sqrt{3}$.

c) Como a sequência é decrescente e limitada inferiomente, pelo Teorema da Sequência Monotônica, a sequência é convergente.

Questão 2: (2,5 pontos) Determine para quais valores de $p > 0$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n)}{n^p}$ converge e para quais ela diverge. Justifique bem as respostas.

Solução: Para analisar a convergência da série dada, iremos utilizar o critério da integral. Para utilizar o critério da integral, precisamos primeiramente definir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$,$\forall n \geq 1$, sendo a_n o termo geral da série, e mostrar que f vai a zero e é decrescente a partir de um certo valor de x. Seja $f(x) = \dfrac{\ln(3x)}{x^p}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x)}{x^p} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{p\, x^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p\, x^p} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^p - \ln(3x)\cdot p\, x^{p-1}}{x^{2p}} = \frac{1 - p\ln(3x)}{x^{p+1}}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - p\ln(3x) < 0 \Leftrightarrow p\ln(3x) > 1 \Leftrightarrow x > \frac{e^{\frac{1}{p}}}{3}$$

Sendo assim, temos f vai a zero e é decrescente para todo $x > \frac{e^{\frac{1}{p}}}{3}$, logo podemos aplicar o critério da integral.

Aplicando o critério, temos:

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln(3x)}{x^p}\, dx$$

Integrando por partes, fazendo $u = \ln(3x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ e $dv = x^{-p} \Rightarrow v = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$, temos:

$$= \lim_{y\to\infty} \left.\frac{\ln(3x)}{(1-p)x^{p-1}}\right|_1^y - \int_1^y \frac{dx}{(1-p)x^p}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \left.\frac{\ln(3x)}{(1-p)x^{p-1}}\right|_1^y - \left.\frac{1}{(1-p)^2\, x^{p-1}}\right|_1^y$$

$$= \lim_{y\to\infty} \left.\frac{(1-p)\ln(3x) - 1}{(1-p)^2\, x^{p-1}}\right|_1^y$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)\ln(3y) - 1}{(1-p)^2\, y^{p-1}} - \frac{(1-p)\ln(3) - 1}{(1-p)^2}$$

Para $0 < p \leq 1$, temos que $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)\ln(3y) - 1}{(1-p)^2\, y^{p-1}} = +\infty$. Logo a integral diverge e, consequentemente, a série diverge.

Para $p > 1$, temos que:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)\ln(3y) - 1}{(1-p)^2\, y^{p-1}} \overset{L'H}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)/y}{-(1-p)^3\, y^{p-2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{-1}{(1-p)^2\, y^{p-1}} = 0$$

Logo a integral converge e, consequentemente, a série converge.

Portanto, a série converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

Questão 3: (2,5 pontos) Determine se cada série a seguir converge absolutamente , condicionalmente ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{3^{n^2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Solução:

(a) Aplicando o critério da razão para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}}\cdot\frac{3^{n^2}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{3^{n^2+2n+1}}\cdot\frac{3^{n^2}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{2n+1}}$$

Calculando o limite análogo no domínio dos números reais:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3^{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^{(2x+1)\ln(3)}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}}\frac{1}{2\ln(3)\,3^{2x+1}}=0$$

Como o limite vai a zero no domínio dos reais, também vai a zero no domínio dos naturais. Sendo assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{2n+1}}=0$$

Portanto, a série converge absolutamente.

(b) Aplicando o critério da comparação no limite para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2=1$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, temos que a série em módulo diverge.

Agora vamos analisar se a série converge condicionalmente utilizando o critério das séries alternadas. Definindo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(n)=a_n\ \forall n\geq 1$, ou seja, $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, temos:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$
- $f'(x)=2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)x^{-\frac{3}{2}}<0\ ,\forall x>\frac{4}{\pi^2}$

Como o modulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério das séries alternadas, a série converge condicionalmente.

Questão 4: (2,5 pontos) Determine, justificando, todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2}$ é convergente.

Solução: Supondo $|x| \geq 1$, aplicando o critério do termo geral para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} n!|x|^{n^2} = +\infty$$

Portanto temos que a série diverge para $|x| \geq 1$.

Supondo $|x| < 1$, aplicando o critério da razão para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{(n+1)^2}}{n!|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!|x|^{n^2+2n+1}}{n!|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x|^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^{-\ln|x|(2n+1)}}$$

Calculando o limite análogo no domínio dos números reais:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y+1}{e^{-\ln|x|(2y+1)}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{-2\ln|x|e^{-\ln|x|(2y+1)}} = 0$$

Como o limite vai a zero no domínio dos reais, também vai a zero no domínio dos naturais. Sendo assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^{-\ln|x|(2n+1)}} = 0$$

Portanto, a série converge absolutamente para $|x| < 1$ e diverge para $|x| \geq 1$.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2016 - 18/10/2016

Turma B
Questão 1: (2,5 pontos) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida de forma recorrente por $x_n = \dfrac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \dfrac{3}{x_{n-1}}\Big)$, para $n > 1$ e $x_1 = 2$.

(a) Supondo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Para $n > 1$ $x_n = \dfrac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \dfrac{3}{x_{n-1}}\Big) \Leftrightarrow 2x_n x_{n-1} = x_{n-1}^2 + 3$. Sendo assim, aplicando o limite na expressão temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 2x_n x_{n-1} &= \lim_{n\to\infty}(x_{n-1}^2 + 3) \\ 2L^2 &= (L^2 + 3) \\ L^2 &= 3 \\ L &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $L = \sqrt{3}$ provando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos positivos. Aplicando o Princípio da Indução Finita, temos:

i) $x_1 = 2 > 0$

ii) Supondo que $x_n > 0$ temos que $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(x_n + \dfrac{3}{x_n}\Big) > 0$

Portanto, $x_n > 0$,$\forall n \geq 1$ e consequentemente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \sqrt{3}$

(b) Sabendo que $x_n > 0$,$\forall n \geq 1$, vamos mostrar que $x_n \leq x_{n-1}$,$\forall n > 1$.

$$x_n \leq x_{n-1} \Leftrightarrow x_n - x_{n-1} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\Big) - x_{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{x_{n-1}}{2} + \frac{3}{2x_{n-1}} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -x_{n-1}^2 + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x_{n-1} \geq \sqrt{3}$$

Sendo assim, temos que $x_n - x_{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow x_{n-1} \geq \sqrt{3}$,$\forall n > 1$, ou seja, se provarmos que a sequência é limitada inferiomente por $\sqrt{3}$, provamos que a sequência é decrescente.

Vamos provar por absurdo que $x_n \geq \sqrt{3}$,$\forall n \geq 1$. Suponha que $x_m < \sqrt{3}$ para algum m:

$$x_m < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(x_{m-1} + \frac{3}{x_{m-1}}\Big) < \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x_{m-1}^2 + 3 < 2\sqrt{3}x_{m-1} \Leftrightarrow x_{m-1}^2 - 2\sqrt{3}x_{m-1} + 3 < 0$$

$$(x_{m-1} - \sqrt{3})^2 < 0$$

Sendo assim, é impossível que $x_n < \sqrt{3}$.

c) Como a sequência é decrescente e limitada inferiomente, pelo Teorema da Sequência Monotônica, a sequência é convergente.

Questão 2: (2,5 pontos) Determine para quais valores de $p > 0$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n)}{n^p}$ converge e para quais ela diverge. Justifique bem as respostas.

Solução: Para analisar a convergência da série dada, iremos utilizar o critério da integral. Para utilizar o critério da integral, precisamos primeiramente definir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$,$\forall n \geq 1$, sendo a_n o termo geral da série, e mostrar que f vai a zero e é decrescente a partir de um certo valor de x. Seja $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^p}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{x^p} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{p\,x^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p\,x^p} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^p - \ln(2x)\cdot p\,x^{p-1}}{x^{2p}} = \frac{1 - p\ln(2x)}{x^{p+1}}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - p\ln(2x) < 0 \Leftrightarrow p\ln(2x) > 1 \Leftrightarrow x > \frac{e^{\frac{1}{p}}}{2}$$

Sendo assim, temos f vai a zero e é decrescente para todo $x > \frac{e^{\frac{1}{p}}}{2}$, logo podemos aplicar o critério da integral.

Aplicando o critério, temos:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln(2x)}{x^p}\,dx$$

Integrando por partes, fazendo $u = \ln(2x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ e $dv = x^{-p} \Rightarrow v = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$, temos:

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(2x)}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_1^y - \int_1^y \frac{dx}{(1-p)x^p}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(2x)}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_1^y - \frac{1}{(1-p)^2\,x^{p-1}}\Big|_1^y$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)\ln(2x) - 1}{(1-p)^2\,x^{p-1}}\Big|_1^y$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)\ln(2y) - 1}{(1-p)^2\,y^{p-1}} - \frac{(1-p)\ln(2) - 1}{(1-p)^2}$$

Para $0 < p \leq 1$, temos que $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)\ln(2y) - 1}{(1-p)^2\,y^{p-1}} = +\infty$. Logo a integral diverge e, consequentemente, a série diverge.

Para $p > 1$, temos que:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)\ln(2y) - 1}{(1-p)^2\,y^{p-1}} \overset{L'H}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{(1-p)/y}{-(1-p)^3\,y^{p-2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{-1}{(1-p)^2\,y^{p-1}} = 0$$

Logo a integral converge e, consequentemente, a série converge.

Portanto, a série converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

Questão 3: (2,5 pontos) Determine se cada série a seguir converge absolutamente , condicionalmente ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{5^{n^2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Solução:

(a) Aplicando o critério da razão para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{5^{(n+1)^2}}\cdot\frac{5^{n^2}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{5^{n^2+2n+1}}\cdot\frac{5^{n^2}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5^{2n+1}}$$

Calculando o limite análogo no domínio dos números reais:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{5^{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^{(2x+1)\ln(5)}}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}}\frac{1}{2\ln(5)\,5^{2x+1}}=0$$

Como o limite vai a zero no domínio dos reais, também vai a zero no domínio dos naturais. Sendo assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5^{2n+1}}=0$$

Portanto, a série converge absolutamente.

(b) Aplicando o critério da comparação no limite para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2=1$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, temos que a série em módulo diverge.

Agora vamos analisar se a série converge condicionalmente utilizando o critério das séries alternadas. Definindo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(n)=a_n\ \forall n\geq 1$, ou seja, $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, temos:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$
- $f'(x)=2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)x^{-\frac{3}{2}}<0\ ,\forall x>\frac{4}{\pi^2}$

Como o modulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério das séries alternadas, a série converge condicionalmente.

Questão 4: (2,5 pontos) Determine, justificando, todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2}$ é convergente.

Solução: Supondo $|x| \geq 1$, aplicando o critério do termo geral para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} n!|x|^{n^2} = +\infty$$

Portanto temos que a série diverge para $|x| \geq 1$.

Supondo $|x| < 1$, aplicando o critério da razão para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{(n+1)^2}}{n!|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!|x|^{n^2+2n+1}}{n!|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x|^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^{-\ln|x|(2n+1)}}$$

Calculando o limite análogo no domínio dos números reais:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y+1}{e^{-\ln|x|(2y+1)}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{-2\ln|x|e^{-\ln|x|(2y+1)}} = 0$$

Como o limite vai a zero no domínio dos reais, também vai a zero no domínio dos naturais. Sendo assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^{-\ln|x|(2n+1)}} = 0$$

Portanto, a série converge absolutamente para $|x| < 1$ e diverge para $|x| \geq 1$.