MAT 2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
P2-Turma A - 13/10/2015
Gabarito

QUESTÃO 1. Considere a série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}.$$

(a) (1 pt) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) (1 pt) Encontre uma fórmula fechada para a sua soma.

(c) (1 pt) Sendo f a função dada pela soma da série, determine $f^{(2015)}(0)$ e $f^{(2016)}(0)$.

RESPOSTA:

(a) O raio de convergência da série é 1 e o seu intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

(b) A soma da série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x^2)^n = \frac{x^2(1+x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Com efeito, para $|y| < 1$, tem-se, aplicando-se duas vezes o teorema sobre integração termo a termo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2 y^n &= y \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^{n-1} = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n y^n\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[y \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1}\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[y \frac{d}{dy}\left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right)\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[y \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{1-y}\right)\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[\frac{y}{(1-y)^2}\right] = \\
&= \frac{y(1+y)}{(1-y)^3}
\end{aligned}$$

(c) A série dada coincide com a série de Taylor de f centrada no zero, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Assim sendo, $f^{(2015)}(0) = 0$ e $f^{(2016)}(0) = (1008)^2 \cdot 2016!$.

QUESTÃO 2. Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x^2-\cos(2x)}{x^4} & x \neq 0 \\ -\frac{2}{3} & x = 0 \end{cases}$$

(a) (2 pt) Ache a série de Taylor centrada no zero da função $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(b) (1 pt) Calcule $F(1/2)$ com erro inferior a 10^-5.

RESPOSTA:

(a) A série de Taylor de $\cos(2x)$ é dada por:

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - 2x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

Substituindo a série acima, na expressão de $f(x)$, vem que:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}}{x^4} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} x^{2n-4}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Encontrando a série de $F(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} t^{2n-4}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} x^{2n-3}}{(2n-3)(2n)!} \end{aligned}$$

(b) O valor pedido é calculado da seguinte forma:

$$F(1/2) = \sum_{n=2}^{K} \frac{(-1)^{n+1} 2^3}{(2n-3)(2n)!} + \epsilon$$

Para encontrar o valor de K que faz com que o erro seja inferior ao valor pedido, é necessário utilizar uma expressão para cálculo do erro. Como trata-se de uma série alternada, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\epsilon \leq |a_{K+1}| \to |a_{K+1}| \leq 10^-5$$

Isso significa que:

$$\frac{2^3}{(2K-1)(2K+2)!} \leq 10^-5 \to K = 4$$

O valor $K = 4$ satisfaz a desigualdade. Assim:

$$F(1/2) \approx \sum_{n=2}^{4} \frac{(-1)^{n+1}2^3}{(2n-3)(2n)!}$$

QUESTÃO 3. Dada a função:

$$g(x) = \begin{cases} 1, -2 \leq x \leq 0 \\ 2, 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) (1 pt) Encontre a série de Fourier de g

(b) (1 pt) Encontre a soma $S(x)$ da série de Fourier de g e esboce o seu gráfico.

(c) (1 pt) Calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

(d) (1 pt) Calcule $S(2014)$ e $S(2015)$

RESPOSTA:

(a) Calculamos os coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\,dx \\ &= \frac{x}{2}\Big|_{-2}^{0} + x\Big|_{0}^{2} = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx + \int_{0}^{2} 2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Big|_{-2}^{0} + \frac{4\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Big|_{0}^{2}\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\, dx + \int_{0}^{2} 2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\, dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{4\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Bigg|_{0}^{2}\right] \\
&= \frac{1}{2n\pi}\left[2-2\cos(n\pi)\right] \\
&= \frac{1}{2n\pi}\left[2-2(-1)^n\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right].
\end{aligned}
$$

Para valores pares de n, tem-se que $b_n = 0$, enquanto que, para valores ímpares, $b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$. Assim, a série de Fourier de g é dada por:

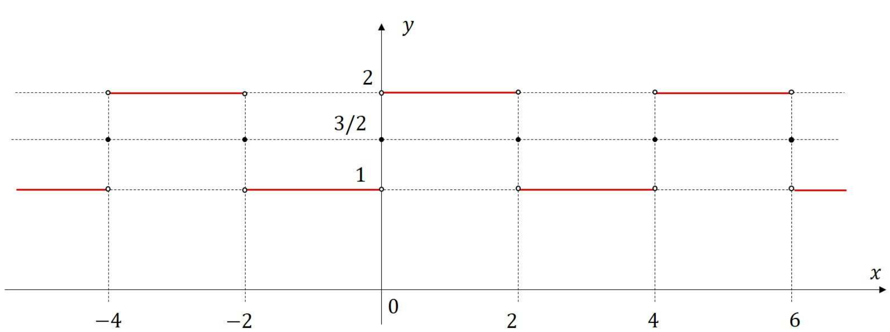
$$
SF(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right].
$$

(b) Pelo teorema da convergência da série de Fourier, a soma da série $S(x)$ é dada por:

- quando $x \in]-2,2[$:
  - $f(x)$, onde $f(x)$ é continua
  - a média dos limites laterais, onde $f(x)$ é descontínua
- quando $x = \pm 2$: $\frac{f(2)+f(-2)}{2}$
- quando $x \notin [-2,2]$: repete-se 4-periodicamente.

Assim, temos $S(x) = \begin{cases} 1, & x \in]-2+4k, 4k[\\ \frac{3}{2}, & x = 2k \\ 2, & x \in]4k, 2+4k[\end{cases}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

O gráfico da $S(x)$ é dado por:



(c) Utilizando a identidade de Parseval

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

com a_0, a_n e b_n encontrados, vem que:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{2} 4\,dx\right] \Rightarrow \\
\frac{9}{2} &+ \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left[x\Big|_{-2}^{0} + 4x\Big|_{0}^{2}\right] \Rightarrow \\
\frac{9}{2} &+ \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}(2+8) \Rightarrow \\
\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{10}{2} - \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

(d) Sabendo que o período da função é igual a 4, conclui-se que:

$$S(2014) = S(504\cdot 4 - 2) = S(-2) = \frac{f(-2)+f(2)}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2},$$

$$S(2015) = S(504\cdot 4 - 1) = S(-1) = f(-1) = 1.$$

MAT 2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
P2-Turma B - 13/10/2015
Gabarito

QUESTÃO 4. Considere a série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}.$$

(a) (1 pt) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) (1 pt) Encontre uma fórmula fechada para a sua soma.

(c) (1 pt) Sendo f a função dada pela soma da série, determine $f^{(2015)}(0)$ e $f^{(2016)}(0)$.

RESPOSTA:

(a) O raio de convergência da série é 1 e o seu intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

(b) A soma da série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x^2)^n = \frac{x^2(1+x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Com efeito, para $|y| < 1$, tem-se, aplicando-se duas vezes o teorema sobre integração termo a termo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2 y^n &= y \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^{n-1} = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n y^n\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[y \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1}\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[y \frac{d}{dy}\left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right)\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[y \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{1-y}\right)\right] = \\
&= y \frac{d}{dy}\left[\frac{y}{(1-y)^2}\right] = \\
&= \frac{y(1+y)}{(1-y)^3}
\end{aligned}$$

(c) A série dada coincide com a série de Taylor de f centrada no zero, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Assim sendo, $f^{(2015)}(0) = 0$ e $f^{(2016)}(0) = (1008)^2 \cdot 2016!$.

QUESTÃO 5. Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{9}{2}x^2 - \cos(3x)}{x^4}, & x \neq 0 \\ -\frac{27}{8}, & x = 0 \end{cases}$$

(a) (2 pt) Ache a série de Taylor centrada no zero da função $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

(b) (1 pt) Calcule $F(1/2)$ com erro inferior a 10^-5.

RESPOSTA:

(a) A série de Taylor de $\cos(3x)$ é dada por:

$$\cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

Substituindo a série acima, na expressão de $f(x)$, vem que:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}}{x^4} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n} x^{2n-4}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Encontrando a série de $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\, dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n} t^{2n-4}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n} x^{2n-3}}{(2n-3)(2n)!} \end{aligned}$$

(b) O valor pedido aproximado é calculado da seguinte forma:

$$F(1/3) = \sum_{n=2}^{K} \frac{(-1)^{n+1} 3^3}{(2n-3)(2n)!} + \epsilon$$

Para encontrar o valor de K que faz com que o erro seja inferior ao valor pedido, é necessário utilizar uma expressão para cálculo do erro. Como trata-se de uma série alternada, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\epsilon \leq |a_{K+1}| \rightarrow |a_{K+1}| \leq 10^-5$$

Isso significa que:

$$\frac{3^3}{(2K-1)(2K+2)!} \leq 10^-5 \to K = 5$$

O valor $K = 5$ satisfaz a desigualdade. Assim:

$$F(1/3) \approx \sum_{n=2}^{5} \frac{(-1)^{n+1}2^3}{(2n-3)(2n)!}$$

Questão 6. Dada a função:

$$g(x) = \begin{cases} 2, -2 \leq x \leq 0 \\ 1, 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) (1 pt) Encontre a série de Fourier de g

(b) (1 pt) Encontre a soma $S(x)$ da série de Fourier de g e esboce o seu gráfico.

(c) (1 pt) Calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

(d) (1 pt) Calcule $S(2014)$ e $S(2015)$

Resposta:

(a) Calculando os coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 1\,dx \\ &= x\Big|_{-2}^{0} + \frac{x}{2}\Big|_{0}^{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx + \int_{0}^{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{4\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Big|_{-2}^{0} + \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Big|_{0}^{2}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx + \int_{0}^{2} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-4\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\Bigg|_{0}^{2}\right] \\
&= \frac{1}{2n\pi}\left[-2+2\cos(n\pi)\right] \\
&= \frac{1}{2n\pi}\left[2(-1)^n-2\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]
\end{aligned}
$$

Para valores pares de n, tem-se que $b_n = 0$, enquanto que, para valores ímpares, $b_n = -\frac{2}{(2n-1)\pi}$. Assim, a série de Fourier de g é dada por:

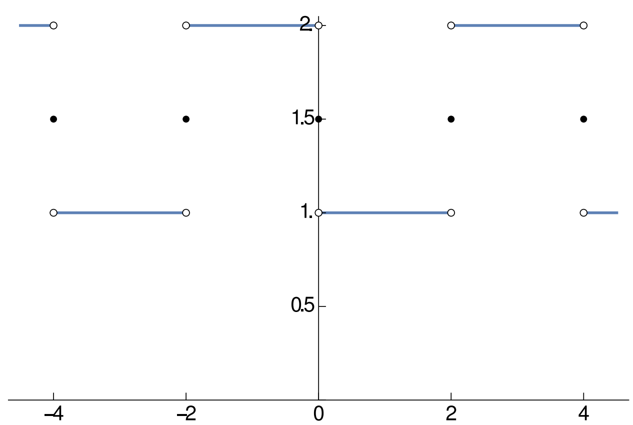
$$SF(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)\pi}\,\mathrm{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right]$$

(b) Pelo teorema da convergência da série de Fourier, a soma da série $S(x)$ é dada por:

- quando $x \in]-2,2[$:
  - $f(x)$, onde $f(x)$ é continua
  - a média dos limites laterais, onde $f(x)$ é descontínua
- quando $x = \pm 2$: $\frac{f(2)+f(-2)}{2}$
- quando $x \notin [-2,2]$: repete-se 4-periodicamente.

Assim, temos $S(x) = \begin{cases} 2, & x \in]-2+4k, 4k[\\ \frac{3}{2}, & x = 2k \\ 1, & x \in]4k, 2+4k[\end{cases}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

O gráfico da $S(x)$ é dado por:



(c) Utilizando a identidade de Parseval

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

com a_0, a_n e b_n encontrados, vem que:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2} \quad + \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} &= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 4\,dx + \int_{0}^{2} 1\,dx\right] \Rightarrow \\
\frac{9}{2} \quad + \quad \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{1}{2}\left[4x\Big|_{-2}^{0} + x\Big|_{0}^{2}\right] \Rightarrow \\
\frac{9}{2} \quad + \quad \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{1}{2}(8+2) \Rightarrow \\
\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{10}{2} - \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

(d) Sabendo que o período da função é igual a 4, conclui-se que:

$$S(2014) = S(504\cdot 4 - 2) = S(-2) = \frac{f(-2)+f(2)}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$S(2015) = S(504\cdot 4 - 1) = S(-1) = f(-1) = 2.$$