Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2013 - 14/10/2013

Turma A
Questão 1: (3,5 pontos)

(a) Obtenha uma expressão da série abaixo e o respectivo raio de convergência

$$\frac{x^5}{4} + \frac{x^9}{8} + \frac{x^{13}}{12} + ...$$

(b) Desenvolva em série de potências de x a seguinte função e calcule $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}

$$f(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t}\, dt$$

Solução

(a) Manipulando algebricamente a expressão da soma:

$$\frac{x^5}{4} + \frac{x^9}{8} + \frac{x^{13}}{12} + ... = x\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + ...\right) = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$$

Sendo $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$ e derivando temos

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-1} = x^3(1 + x^4 + x^8 + ...) = \frac{x^3}{1 - x^4} \\
& \quad \text{que converge se e somente se } |x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \\
g(x) &= \int_0^x g'(t)\, dt = \int_0^x \frac{t^3}{1 - t^4}\, dt \\
& \quad \text{fazendo } u = 1 - t^4,\ du = -4t^3\, dt \\
&= \left[-\frac{1}{4}\ln(1 - t^4)\right]_0^x = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{1 - x^4} + \frac{1}{4}\ln(1) \\
&= \ln\frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^4}}
\end{aligned}$$

Logo, a série pode ser expressa por:

$$S(x) = x.\ln\frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^4}}$$

A expressão acima só é válida se $|x^4| < 1$, pois ao escrever $g'(x)$ como a soma da série geométrica de razão x^4, tal igualdade só é válida se a razão da série geométrica for menor, em módulo, que 1. Um teorema garante que o raio de convergência se mantém na derivação e integração da série de potência. Como $|x|^4 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, o raio de convergência é 1.

O exercício pede o raio de convergência. Porém testando os extremos do intervalo, para $x = -1$ a série fica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{4n+1}}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{4n}$$

Que é uma série harmônica de grau 1, logo é divergente. O mesmo ocorre para o extremo $x = 1$. Portanto o intervalo de convergência é $-1 < x < 1$.

(b) Inicialmente encontra-se uma expansão em série de potências do integrando.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos t}{t} &= \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}{t} \\
&= \frac{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}{t} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n-1}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

A expressão acima é válida para todo $t \neq 0$. Calculando a integral e chegando à série de potências desejada

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{(2n)(2n)!}$$

Estimando o valor de $f(1)$:

$$f(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n)!} + E_N(1)$$

A série acima é uma série alternada que converge pelo Critério de Leibnitz. Logo, para estimar o erro, utiliza-se o seguinte critério

$$E_N \leq |a_{N+1}|$$

Se for imposto que $|a_{N+1}| < 10^{-3}$, garante-se que o erro será inferior a 10^{-3}

$$\frac{1}{(2N+2)(2N+2)!} < 10^{-3}$$

Para $N = 2$ a desigualdade é satisfeita. Com isso:

$$f(1) \approx \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n)!} = \frac{1}{2.2!} - \frac{1}{4.4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{96}$$

Questão 2: (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

(a) Determine a série de Fourier de senos de f

(b) Obtenha a soma da série de Fourier de senos de f, $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e esboce o gráfico de S no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

(c) Determine $S\left(\frac{1319\pi}{2}\right)$

Solução

(a) Seja $F(x)$ a extensão ímpar de $f(x)$ definida de $[-\pi, \pi]$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x, \ -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, \ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

A série de Fourier de $F(x)$ é a série de senos de $f(x)$. Como $F(x)$ é uma função ímpar, temos que $a_0 = 0$ e $a_n = 0$ (ou seja é uma série de senos). Calculando b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x).\ \text{sen}\,(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\ \text{sen}\,(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x.\ \text{sen}\,(nx)\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\text{sen}\,(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi n^2}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \end{aligned}$$

A série de Fourier será dada por:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\ \text{sen}\,(nx)$$

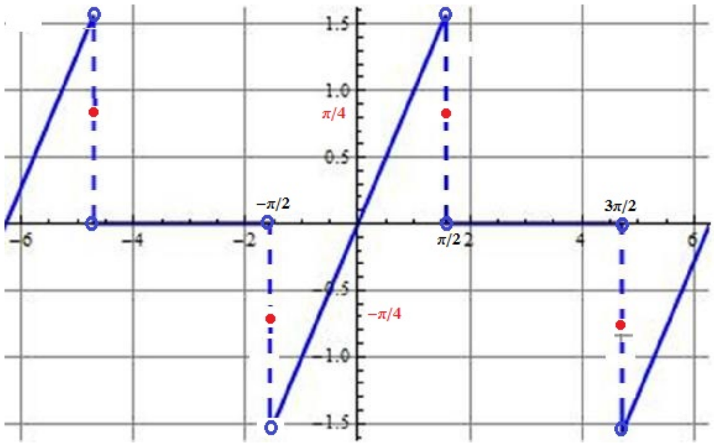
(b) A F é C^1 por partes. Pelo Teorema, nos pontos de $]-\pi, \pi[$ onde $F(x)$ é contínua, ou seja, em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, a soma da série de Fourier $S(x)$ converge para $F(x)$. Nos pontos onde $F(x)$ é descontínua, ou seja, $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$, a soma $S(x)$ é igual a média aritmética dos valores dos limites laterais de $F(x)$ naquele ponto.

Para obter os valores de $S(x)$ fora do intervalo $]-\pi, \pi[$ basta tomar a extensão perãodica de $F(x)$ e aplicar o mesmo Teorema.

Portanto,

$$S(x) = \begin{cases} 0, \ -\pi + 2k\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x - 2k\pi, \ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0, \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4}, \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4}, \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

O gráfico de S é



(c) Sabe-se que:

$$659\pi < \frac{1319\pi}{2} < 660\pi$$

Subtraindo 330 vezes o perãodo da função em todos os membros, para achar o valor de x equivalente no intervalo de definição da função $[-\pi, \pi]$:

$$659\pi - 330(2\pi) < \frac{1319\pi}{2} - 330(2\pi) < 660\pi - 330(2\pi)$$

Com isso:

$$-\pi < \frac{1319\pi}{2} - 330(2\pi) < 0$$

Logo:

$$S\left(\frac{1319\pi}{2}\right) = S\left(\frac{1319\pi}{2} - 660\pi\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{F\left(-\frac{\pi}{2}^{-}\right) + F\left(-\frac{\pi}{2}^{+}\right)}{2} = \frac{0 - \frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Questão 3: (3,5 pontos)

(a) Calcule a serie de Fourier da função $f(x) \begin{cases} 0, \ -\pi < x \leq 0 \\ \\ -x, \ 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(b) Sabendo que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e usando o item anterior, calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$

Solução

(a) Calculando os coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -x\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\cos(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\ \operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Para valores pares de n, $a_n = 0$. Já quando n assume valores ímpares, $a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \operatorname{sen}(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\ \operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(\pi(-1)^n - 0\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(\pi(-1)^n\right) \\ &= \frac{1}{n}\left((-1)^n\right) \end{aligned}$$

A série de Fourier é dada por:

$$S(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n}\ \operatorname{sen}(nx)\right)$$

(b) Utiliza-se a identidade de Parseval:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx \\
\frac{\pi^2}{8} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{3} \\
\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \frac{\pi^2}{6} &= \frac{5\pi^2}{24} \\
\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} &= \frac{5\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{6} \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} &= \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}
$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2013 - 14/10/2013

Turma B
Questão 1: (3,5 pontos)

(a) Obtenha uma expressão da série abaixo e o respectivo raio de convergência

$$\frac{x^4}{3} + \frac{x^7}{6} + \frac{x^{10}}{9} + \dots$$

(b) Desenvolva em série de potências de x a seguinte função e calcule $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}

$$f(x) = \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t}\,dt$$

(a) Manipulando algebricamente a expressão da soma:

$$\frac{x^4}{3} + \frac{x^7}{6} + \frac{x^{10}}{9} + ... = x\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + ...\right)$$

Sendo $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n}$ e derivando temos

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n-1} = x^2 + x^5 + x^8 + ... = \frac{x^2}{1-x^3} \\
&\quad \text{que converge se e somente se } |x^3| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \\
g(x) &= \int_0^x g'(t)\,dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^3}\,dt \\
&\quad \text{fazendo } u = 1-t^3,\ du = -3t^2\,dt \\
&= \left[-\frac{1}{3}\ln(1-t^3)\right]_0^x = -\frac{1}{3}\ln(1-x^3) + \frac{1}{3}\ln(1) \\
&= \ln\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}
\end{aligned}$$

Logo, a série pode ser expressa por:

$$S(x) = x.\ln\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

A expressão acima só é válida se $|x^3| < 1$, pois ao escrever $g'(x)$ como a soma da série geométrica de razão x^3, tal igualdade só é válida se a razão da série geométrica for menor, em módulo, que 1. Um teorema garante que o raio de convergência se mantém na derivação e integração da série de potência. Como $|x|^4 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, o raio de convergência é 1.

O exercício pede o raio de convergência. Porém testando os extremos do intervalo, para $x = -1$ a série fica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3n},$$

que é uma série harmônica, logo divergente. O mesmo ocorre para o extremo $x = 1$. Portanto o intervalo de convergência é $-1 < x < 1$.

(b) Inicialmente encontra-se uma expansão em série de potências do integrando.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos t}{t} &= \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}{t} \\
&= \frac{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}{t} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n-1}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

A expressão acima é válida para todo $t \neq 0$. Calculando a integral e chegando é série de potências desejada

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{2n}}{(2n)(2n)!}$$

Estimando o valor de $f(1)$:

$$f(1) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n)!} + E_N(1)$$

A série acima é uma série alternada que converge pelo Critério de Leibnitz. Logo, para estimar o erro, utiliza-se o seguinte critério

$$E_N \leq |a_{N+1}|$$

Se for imposto que $|a_{N+1}| < 10^{-3}$, garante-se que o erro será inferior a 10^{-3}

$$\frac{1}{(2N+2)(2N+2)!} < 10^{-3}$$

Para $N = 2$ a desigualdade é satisfeita. Com isso:

$$f(1) \approx \sum_{n=1}^{2}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n)!} = \frac{1}{2.2!} - \frac{1}{4.4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{96}$$

Questão 2: (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} -x, \; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \\ 0, \; \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

(a) Determine a série de Fourier de senos de f

(b) Obtenha a soma da série de Fourier de senos de f, $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e esboce o gráfico de S no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

(c) Determine $S\left(\frac{1277\pi}{2}\right)$

Solução

(a) Seja $F(x)$ a extensão ímpar de $f(x)$ definida de $[-\pi, \pi]$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \\ -x, \; -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \\ 0, \; \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

A série de Fourier de $F(x)$ é a série de senos de $f(x)$. Como $F(x)$ é uma função ímpar, temos que $a_0 = 0$ e $a_n = 0$ (ou seja é uma série de senos). Calculando b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x).\ \text{sen}\,(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x).\ \text{sen}\,(nx)\,dx \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x.\ \text{sen}\,(nx)\right] = -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right] \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\text{sen}\,(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi n^2}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

A série de Fourier será dada por:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi n^2}\ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\ \text{sen}\,(nx)$$

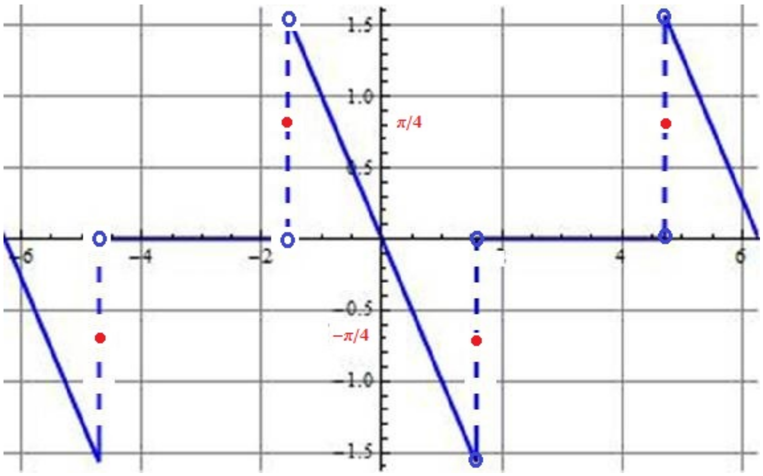
(b) A F é C^1 por partes. Pelo Teorema, nos pontos de $]-\pi, \pi[$ onde $F(x)$ é contínua, ou seja, em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, a soma da série de Fourier $S(x)$ converge para $F(x)$. Nos pontos onde $F(x)$ é descontínua, ou seja, $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$, a soma $S(x)$ é igual a média aritmética dos valores dos limites laterais de $F(x)$ naquele ponto.

Para obter os valores de $S(x)$ fora do intervalo $]-\pi, \pi[$ basta tomar a extensão perãodica de $F(x)$ e aplicar o mesmo Teorema.

Portanto,

$$S(x) = \begin{cases} 0, \; -\pi + 2k\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \\ -x - 2k\pi, \; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \\ 0, \; \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \\ \\ \frac{\pi}{4}, \; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \\ -\frac{\pi}{4}, \; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

O gráfico de S é



(c) Sabe-se que:

$$638\pi < \frac{1319\pi}{2} < 639\pi$$

Subtraindo 319 vezes o perãodo da função em todos os membros, para achar o valor de x equivalente no intervalo de definição da função $[-\pi, \pi]$:

$$638\pi - 319(2\pi) < \frac{1277\pi}{2} - 319(2\pi) < 639\pi - 319(2\pi)$$

Com isso:

$$0 < \frac{1277\pi}{2} - 330(2\pi) < \pi$$

Logo

$$S\left(\frac{1277\pi}{2}\right) = S\left(\frac{1277\pi}{2} - 638\pi\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{F\left(\frac{\pi^-}{2}\right) + F\left(\frac{\pi^+}{2}\right)}{2} = \frac{0 - \frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Questão 3: (3,5 pontos)

(a) Calcule a série de Fourier da função $f(x) \begin{cases} 0, -\pi < x \leq 0 \\ \\ -x, 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(b) Sabendo que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e usando o item anterior, calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$

Solução

(a) Calculando os coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -x\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x \ \text{sen}\,(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\, dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(0 + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Para valores pares de n, $a_n = 0$. Já quando n assume valores ímpares, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \text{sen}\,(nx)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \ \text{sen}\,(nx)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\pi(-1)^n - 0 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\pi(-1)^n \right) \end{aligned}$$

A série de Fourier é dada por:

$$S(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n} \ \text{sen}\,(nx)$$

(b) Utiliza-se a identidade de Parseval:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx \\
\frac{\pi^2}{8} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{3} \\
\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \frac{\pi^2}{6} &= \frac{5\pi^2}{24} \\
\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} &= \frac{5\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{6} \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} &= \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}
$$