

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2009

Turma A

1ª Questão: Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(a) (1,5) Determine a série de Fourier de f .

(b) (1,0) Calcule a soma da série de Fourier de f nos pontos $x = 8$, $x = 10$ e $x = 7\pi$.

(c) (1,0) Mostre que

$$\frac{5\pi^2}{24} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Solução:

(a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen}(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\pi \frac{(1)^n}{n} + \frac{1}{n} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de f é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \iff \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 \cos((2n-1)x)}{\pi(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)}{n}$$

(b) Seja $S(x)$ a soma da série de Fourier.

Para a série de Fourier analisada, os pontos de descontinuidade são $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Segundo o Teorema da Convergência Pontual, a soma da série nos pontos de descontinuidade é:

$$\frac{f((2k+1)\pi^-) + f((2k+1)\pi^+)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^+} f(x) \right)$$

Assim, para $x = 7\pi$, a soma da série será:

$$S(7\pi) = \frac{f(7\pi^-) + f(7\pi^+)}{2} = S(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(0^+)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Já para $x = 8$ e $x = 10$, que são pontos de continuidade, temos que a soma da série é:

$$S(8) = S(8 - 2\pi) = f(8 - 2\pi) = 8 - 2\pi$$

$$S(10) = S(10 - 4\pi) = f(10 - 4\pi) = 0$$

(c) Para a função $f(x)$, definida em $-\pi \leq x \leq \pi$, segue, por Parseval, que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

Substituindo com os valores encontrados no item (a), vem que:

$$\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{5\pi^2}{24} \text{ c.q.d.}$$

2ª Questão: (4,5) Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) (1,5) $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - y^2) \ln(x)}{x}$

(b) (1,5) $y' = \frac{-y}{x} + \sqrt{1 + x^2}$

(c) (1,5) $2xy' + x + \frac{y^2}{x} = 0, y(1) = 0$

Solução:

(a) Separando as variáveis x e y , ficamos com:

$$\frac{dy}{1 - y^2} = \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Sendo assim, a equação diferencial tem fácil resolução, bastando integrá-la:

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int \frac{\ln(x)}{x} dx + \mathbb{C}$$

$$\int \frac{dy}{(1 + y)(1 - y)} = \frac{\ln^2(x)}{2} + \mathbb{C}$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{(1 + y)} + \frac{\frac{1}{2}}{(1 - y)} \right) dy = \frac{\ln^2(x)}{2} + \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{2} (\ln|1 + y| - \ln|1 - y|) = \frac{\ln^2(x)}{2} + \mathbb{C}$$

$$\ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = \ln^2(x) + \mathbb{C}_2$$

$$\implies \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = \mathbb{C}_3 \cdot e^{\ln^2 x} = \mathbb{C}_3 \cdot x^{\ln x}$$

- (b) Temos que $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{1+x^2}$ é uma equação diferencial linear. Partindo daí, calcula-se primeiramente a solução homogênea (para $y' + \frac{y}{x} = 0$).

$$y_H = \mathbb{C} \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{\mathbb{C}}{x}$$

Sendo assim, dividindo a equação original por $\frac{1}{x}$ (y_H para $\mathbb{C} = 1$), ficamos com:

$$x \cdot y' + y = x\sqrt{1+x^2}$$

$$(x \cdot y)' = x\sqrt{1+x^2}$$

Sendo assim, pode-se integrar a equação, ficando com:

$$(x \cdot y) = \int x\sqrt{1+x^2}dx + \mathbb{C}$$

$$\implies x \cdot y = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \mathbb{C}$$

- (c) Trata-se de uma equação com coeficientes homogêneos, sendo que ela pode ser facilmente resolvida fazendo a mudança de variável:

$$\left(\frac{y}{x} = u \implies y = ux \implies y' = u'x + u\right)$$

$$2x(u + xu') + x + xu^2 = 0$$

Sendo $x \neq 0$, ficamos com:

$$2xu' = -u^2 - 2u - 1 \implies \frac{-u'}{u^2 + 2u + 1} = \frac{1}{2x}$$

Temos, agora, uma equação com variáveis separadas, que pode ser resolvida simplesmente integrando-

a:

$$\int \frac{du}{(u+1)^2} = -\int \frac{dx}{2x} + \mathbb{C}$$
$$\frac{1}{u+1} = \frac{\ln|x|}{2} + \mathbb{C} \implies \frac{x}{x+y} = \frac{\ln|x|}{2} + \mathbb{C}$$

Para a CI $y(1) = 0$, obtem-se facilmente $\mathbb{C} = 1$, e a resposta da equação diferencial fica:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{\ln|x|}{2} + 1$$

3ª Questão: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) (1,0) Determine a série de potências de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(b) (1,0) Determine $\int_0^1 f(t)dt$ com erro inferior a 10^{-5} .

Solução:

(a) Sabe-se que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Então

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \neq 0$$

Portanto

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{4n+1}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{4n+2}}{(4n+2)(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(b)

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+2)(2n+1)!}$$

converge por Leibniz e basta considerar

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(4n+2)(2n+1)!}$$

para se obter um erro menor que $a_{N+1} = \frac{1}{(4N+6)(2N+3)!}$.

Logo, queremos N tal que $(4N + 6)(2N + 3)! > 10^5$, o que ocorre para $N \geq 3$, uma vez que $(4 \cdot 3 + 6)(2 \cdot 3 + 3)! = 18 \cdot 9! = 18 \cdot 362880 > 6 \cdot 10^6 > 10^5$.

Portanto,

$$F(1) \approx \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{(4n+2)(2n+1)!}, \text{ com erro menor que } 10^{-5}$$