Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2005 - 17/10/2005

Turma A

Questão 1:

(a) (1,0 ponto) Dê as fórmulas (sem resolver as integrais) para as constantes a_n, $n \geq 0$, b_n, $n \geq 1$, tais que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = e^x.x^2, \ -\pi < x < \pi$$

(b) (1,0 ponto) Determine a soma da série para $x = \frac{11\pi}{2}$ e para $x = 11\pi$.

Solução:

(a) Seja $f(x) = e^x \cdot x^2$. Então,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot x^2 dx$$

$$n \geq 1 : a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot x^2 \cdot \cos(nx) dx$$

$$n \geq 1 : b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen}(nx) dx$$

(b) Para a série de Fourier analisada, os pontos de descontinuidade são $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Segundo o Teorema da Convergência Pontual, a soma da série nos pontos de descontinuidade é:

$$\frac{f((2k+1)\pi^-) + f((2k+1)\pi^+)}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\pi} \cdot \pi^2 + e^{-\pi} \cdot (-\pi)^2\right) = (e^{\pi} + e^{-\pi})\frac{\pi^2}{2}.$$

Assim, para $x = 11\pi$, a soma da série será:

$$(e^{\pi} + e^{-\pi})\frac{\pi^2}{2} = \frac{(e^{2\pi} + 1)\pi^2}{2e^{\pi}}$$

Já para $x = \frac{11\pi}{2}$, que é ponto de continuidade, temos que a soma da série é:

$$f\left(\frac{11\pi}{2}\right) = f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = e^{\frac{-\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Questão 2: (2,0 pontos) Encontre as constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que minimizem a expressão

$$\int_0^\pi \left[x - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)\right)\right]^2 dx.$$

Solução:

$$\int_0^\pi \left[x - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)\right)\right]^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \left[|x| - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)\right)\right]^2 dx$$

Para achar o mínimo de $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \left[|x| - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)\right)\right]^2 dx$, é suficiente achar o mínimo de $\int_{-\pi}^\pi \left[|x| - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)\right)\right]^2 dx$ e isto acontece quando a_0 e a_k, $k = 1, \ldots, n$ são os coeficientes de Fourier da função $f(x) = |x|$.

Isto é:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[x\cdot\left.\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\right|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{\cos(kx)}{k^2}\right|_0^\pi\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left[\cos(kx) - 1\right] = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

Questão 3:

(a) (1,5 ponto) Obtenha uma série de potências que representa a função $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ no intervalo $-1 < x < 1$.

(b) (1,5 ponto) Obtenha $\ln 2$ com erro inferior a 10^{-5}.

Solução:

(a)

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt + \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n dt + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1} =$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right), \; se \; -1 < x < 1$$

(b)

$$\ln 2 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)3^{2k+1}} = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)9^k}$$

Logo, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$, temos:

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)9^k} + E_n,$$

onde

$$E_n = \frac{2}{3}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)9^k}.$$

Para todo $k \geq n+1$, temos $\frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2n+3}$. Logo, $\forall n = 1, 2, \ldots,$

$$E_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2n+3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{9^k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\frac{1}{9^{n+1}}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{12 \cdot 9^n (2n+3)}.$$

Basta achar n tal que $12 \cdot 9^n \cdot (2n+3) > 10^5$. Tome $n = 4$ e veja que $12 \cdot 9^4 \cdot (2.4+3) > 800000 > 10^5$. Logo,

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{(2k+1)9^k} + E_4, \; 0 < E_4 < \frac{1}{800000}.$$

Questão 4:

(a) (1,0 ponto) Obtenha a expansão em Série de Taylor da função $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, em torno de $x_0 = 0$.

(b) (1,0 ponto) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)!}$.

(c) (1,0 ponto) Calcule $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ com erro menor do que 10^{-3}.

Solução:

(a) Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

segue que

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Basta fazer $x = 1$ na série acima e observar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = \operatorname{senh} 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

(c) Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

segue que

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma,

$$\int_0^x e^{-s^2} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $x = 0$, vem $C = 0$. Assim,

$$\int_0^1 e^{-s^2} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Como a série acima é alternada, para que o erro seja menor que 10^{-3}, impomos

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-3} \Longleftrightarrow (2n+3)(n+1)! > 1000 \Longrightarrow n \geq 4.$$

Portanto,

$$\int_0^1 e^{-s^2} ds \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}, \text{com erro menor que } 10^{-3}.$$