Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2017 - 29/08/2017

Turma A

1ª Questão: (2,0 pontos) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequencia definida de forma recorrente por

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}, \quad n \geq 1$$

a) Supondo que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, calcule seu limite.

b) Prove que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e decrescente.

c) Justifique por que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Solução:

(a) Supondo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Sendo assim, aplicando o limite na expressão recursiva, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} \\
L &= \frac{3(1+L)}{3+L} \\
3L + L^2 &= 3 + 3L \\
L^2 &= 3 \\
L &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $L = \sqrt{3}$ provando que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos positivos. Aplicando o Princípio da Indução Finita, temos:

i) $a_1 = 3 > 0$

ii) Supondo que $a_n > 0$ temos que $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} > 0$

Portanto, $a_n > 0 \; \forall n \geq 1$ e consequentemente $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \sqrt{3}$

(b) Sabendo que $a_n > 0 \; \forall n \geq 1$, vamos mostrar que $a_{n+1} < a_n \; \forall n > 1$.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &< a_n \\
\Leftrightarrow \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} &< a_n \\
\Leftrightarrow 3+3a_n &< 3a_n + a_n^2 \\
\Leftrightarrow 3 &< a_n^2 \\
\Leftrightarrow a_n &> \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Sendo assim, temos que $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_n > \sqrt{3}\ \forall n \geq 1$, ou seja, se provarmos que a sequência é limitada inferiomente por $\sqrt{3}$, provamos que a sequência é decrescente.

Vamos provar pelo Princípio da Indução Finita que $a_n > \sqrt{3}\ \forall n \geq 1$.

i) $a_1 = 3 > \sqrt{3}$
ii) Supondo que $a_n > \sqrt{3}$ vamos mostrar que $a_{n+1} > \sqrt{3}$:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &> \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} &> \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow 3+3a_n &> 3\sqrt{3} + a_n\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow (3-\sqrt{3})a_n &> 3(\sqrt{3}-1) \\
\Leftrightarrow a_n &> \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Ou seja, $a_{n+1} > \sqrt{3} \Leftrightarrow a_n > \sqrt{3}$, e logo provamos que supondo que $a_n > \sqrt{3}$ temos que $a_{n+1} > \sqrt{3}$.

Portanto a sequência é limitada inferiomente por $\sqrt{3}$ e, consequentemente, decrescente.

c) Como a sequência é decrescente e limitada inferiomente, pelo Teorema da Sequência Monotônica, a sequência é convergente.

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre os valores de p para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$$

é convergente.

Solução:

Aplicando o critério da comparação no limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+n^2)^p}{n^{2p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2p+1}(\frac{1}{n^2}+1)^p}{n^{2p+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+1\right)^p = 1$$

Sendo assim, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p+1}$ converge.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2p-1}}$ é uma série harmônica, e portanto converge $\Leftrightarrow -2p-1 > 1 \Leftrightarrow p < -1$.

Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ converge se e somente se $p < -1$.

Questão 3: (2,5 pontos) Determine se cada série a seguir converge absolutamente , condicionalmente ou diverge:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}$

Solução:

(a) Aplicando o critério da comparação no limite para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, temos que a série em módulo diverge.

Agora vamos analisar se a série converge condicionalmente utilizando o critério de Liebniz. Definindo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(n)=a_n\ \forall n\geq 1$, ou seja, $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, temos:

- $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)=0$
- $f'(x)=-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}<0\ \forall x>\frac{2}{\pi}$

Como o modulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério de Liebniz, a série converge condicionalmente.

(b) Aplicando o critério da raiz para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}$$

Calculando o limite do expoente no domínio dos números reais:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Sendo assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$$

Portanto, a série converge absolutamente.

Questão 4: (3 pontos) Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^n}{3^n n}$$

a) Verifique se a série converge quando $x = 5$, pelo critério de Liebniz.

b) Determine o valor da soma da série do item a) com erro inferior a 10^{-3}.

c) Determine o raios e intervalo máximo de convergência da série acima.

Solução:

a) Para $x = 5$, temos a seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n n}$$

Vamos analisar se a série converge utilizando o critério de Liebniz:

- $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{3^n n} = 0$
- $\frac{1}{3^n n}$ é claramente decrescente

Como o modulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério de Liebniz, a série converge.

b) Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n n}$ é uma série alternada, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n n} \approx \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n n}$$

$$erro = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n n} \right| \leq |a_{k+1}| = \frac{1}{3^{k+1}(k+1)}$$

Para garantir que $erro < 10^{-3}$, basta impor que $\frac{1}{3^{k+1}(k+1)} < 10^{-3}$. Sendo assim, temos:

$$\frac{1}{3^{k+1}(k+1)} < 10^{-3}$$

$$3^{k+1}(k+1) > 10^3$$

Para $k = 4$:

$$3^{k+1}(k+1) = 3^5 \cdot 5 = 1215 > 10^3$$

Portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n n} \approx \sum_{n=1}^{4}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n n}$$

Com $erro < 10^{-3}$.

c) Aplicando o critério da razão para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-4|^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}\frac{3^n n}{|x-4|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{|x-4|}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{|x-4|}{3} = \frac{|x-4|}{3}$$

Para $\frac{|x-4|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x-4| < 3$: a série converge absolutamente, pelo critério da razão.

Para $\frac{|x-4|}{3} > 1 \Leftrightarrow |x-4| > 3$: o termo geral não vai a zero e, portanto, a série diverge.

Para $\frac{|x-4|}{3} = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = 7$: o critério da razão é inconclusivo, outros critérios devem ser utilizados. De qualquer maneira, já podemos concluir que o raio de convergência é 3.

Para $x = 1$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-3)^n}{3^n n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Temos que a série diverge, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é uma série harmônica divergente.

Para $x = 7$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Esta série não apresenta convergência absoluta, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

Para verificar se há convergência condicional, utilizamos o critério de Leibniz:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$
- $|a_n| = \frac{1}{n}$ é claramente decrescente

Como o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério de Liebniz, a série é convergente. Portanto, a série converge condicionalmente.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2017 - 29/08/2017

Turma B
1ª Questão: (2,0 pontos) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequencia definida de forma recorrente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2(1+a_n)}{2+a_n}, \quad n \geq 1$$

a) Supondo que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, calcule seu limite.

b) Prove que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e decrescente.

c) Justifique por que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Solução:

(a) Supondo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Sendo assim, aplicando o limite na expressão recursiva, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} \\ L &= \frac{2(1+L)}{2+L} \\ 2L + L^2 &= 2 + 2L \\ L^2 &= 2 \\ L &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $L = \sqrt{2}$ provando que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos positivos. Aplicando o Princípio da Indução Finita, temos:

i) $a_1 = 2 > 0$

ii) Supondo que $a_n > 0$ temos que $a_{n+1} = \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} > 0$

Portanto, $a_n > 0\ \forall n \geq 1$ e consequentemente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \sqrt{2}$

(b) Sabendo que $a_n > 0\ \forall n \geq 1$, vamos mostrar que $a_{n+1} < a_n\ \forall n > 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \\ \Leftrightarrow \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} &< a_n \\ \Leftrightarrow 2+2a_n &< 2a_n + a_n^2 \\ \Leftrightarrow 2 &< a_n^2 \\ \Leftrightarrow a_n &> \sqrt{2} \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_n > \sqrt{2}\ \forall n \geq 1$, ou seja, se provarmos que a sequência é limitada inferiomente por $\sqrt{2}$, provamos que a sequência é decrescente.

Vamos provar pelo Princípio da Indução Finita que $a_n > \sqrt{2}\ \forall n \geq 1$.

i) $a_1 = 2 > \sqrt{2}$

ii) Supondo que $a_n > \sqrt{2}$ vamos mostrar que $a_{n+1} > \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} &> \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 2+2a_n &> 2\sqrt{2} + a_n\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow (2-\sqrt{2})a_n &> 2(\sqrt{2}-1) \\ \Leftrightarrow a_n &> \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ou seja, $a_{n+1} > \sqrt{2} \Leftrightarrow a_n > \sqrt{2}$, e logo provamos que supondo que $a_n > \sqrt{2}$ temos que $a_{n+1} > \sqrt{2}$.

Portanto a sequência é limitada inferiomente por $\sqrt{2}$ e, consequentemente, decrescente.

c) Como a sequência é decrescente e limitada inferiomente, pelo Teorema da Sequência Monotônica, a sequência é convergente.

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre os valores de p para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$$

é convergente.

Solução:

Aplicando o critério da comparação no limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+n^2)^p}{n^{2p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2p+1}(\frac{1}{n^2}+1)^p}{n^{2p+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+1\right)^p = 1$$

Sendo assim, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p+1}$ converge.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2p-1}}$ é uma série harmônica, e portanto converge $\Leftrightarrow -2p-1>1 \Leftrightarrow p<-1$.

Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ converge se e somente se $p<-1$.

Questão 3: (2,5 pontos) Determine se cada série a seguir converge absolutamente , condicionalmente ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}$

Solução:

(a) Aplicando o critério da comparação no limite para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos x}=1$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, temos que a série em módulo diverge.

Agora vamos analisar se a série converge condicionalmente utilizando o critério de Liebniz. Definindo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(n)=a_n\ \forall n\geq 1$, ou seja, $f(x)=\tan\left(\frac{1}{x}\right)$, temos:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)=0$
- $f'(x)=-\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}<0\ \forall x>0$

Como o modulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério de Liebniz, a série converge condicionalmente.

(b) Aplicando o critério da raiz para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}$$

Calculando o limite do expoente no domínio dos números reais:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x}{2}=-\frac{1}{2}$$

Sendo assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=e^{-\frac{1}{2}}<1$$

Portanto, a série converge absolutamente.

Questão 4: (3 pontos) Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{4^n n}$$

a) Verifique se a série converge quando $x = 4$, pelo critério de Liebniz.

b) Determine o valor da soma da série do item a) com erro inferior a 10^{-3}.

c) Determine o raios e intervalo máximo de convergência da série acima.

Solução:

a) Para $x = 5$, temos a seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4^n n}$$

Vamos analisar se a série converge utilizando o critério de Liebniz:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n n} = 0$
- $\frac{1}{4^n n}$ é claramente decrescente

Como o modulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério de Liebniz, a série converge.

b) Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4^n n}$ é uma série alternada, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4^n n} \approx \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}\frac{1}{4^n n}$$

$$erro = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4^n n}\right| \leq |a_{k+1}| = \frac{1}{4^{k+1}(k+1)}$$

Para garantir que $erro < 10^{-3}$, basta impor que $\frac{1}{4^{k+1}(k+1)} < 10^{-3}$. Sendo assim, temos:

$$\frac{1}{4^{k+1}(k+1)} < 10^{-3}$$
$$4^{k+1}(k+1) > 10^3$$

Para $k = 3$:

$$4^{k+1}(k+1) = 4^4 \cdot 4 = 1024 > 10^3$$

Portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n n} \approx \sum_{n=1}^{3} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n n}$$

Com $erro < 10^{-3}$.

c) Aplicando o critério da razão para a série em módulo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)} \frac{4^n n}{|x-3|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{|x-3|}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \frac{|x-3|}{4} = \frac{|x-3|}{4}$$

Para $\frac{|x-3|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 4$: a série converge absolutamente, pelo critério da razão.

Para $\frac{|x-3|}{4} > 1 \Leftrightarrow |x-3| > 4$: o termo geral não vai a zero e, portanto, a série diverge.

Para $\frac{|x-3|}{4} = 1 \Rightarrow x = -1 \vee x = 7$: o critério da razão é inconclusivo, outros critérios devem ser utilizados.

De qualquer maneira, já podemos concluir que o raio de convergência é 4.

Para $x = -1$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-4)^n}{4^n n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Temos que a série diverge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série harmônica divergente.

Para $x = 7$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

Esta série não apresenta convergência absoluta, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Para verificar se há convergência condicional, utilizamos o critério de Leibniz:

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $|a_n| = \frac{1}{n}$ é claramente decrescente

Como o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério de Liebniz, a série é convergente. Portanto, a série converge condicionalmente.