Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2016 - 30/08/2016

Turma A
Questão 1: (4,0 pontos) Resolva as equações

(a) $xy' = y + \sqrt{x^2 + 4y^2}$ com $x > 0$

(b) $y' - 2xy = x$

Solução:

(a) A equação dada possui coeficientes homogêneos pois $P(tx, ty) = tP(x, y)$ e $Q(tx, ty) = tQ(x, y)$. Assim, faz-se a seguinte mudança de variáveis: $y = ux$ e $y' = u + xu'$, com $x > 0$. Substituindo na equação, obtém-se:

$$\begin{aligned}
x\left(u + xu'\right) &= ux + \sqrt{x^2 + 4u^2x^2} \Leftrightarrow \\
ux + x^2u' &= ux + x\sqrt{1 + 4u^2} \Leftrightarrow \\
x\frac{du}{dx} &= \sqrt{1 + 4u^2} \Leftrightarrow \\
\frac{du}{\sqrt{1 + 4u^2}} &= \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \\
\int \frac{du}{\sqrt{1 + 4u^2}} &= \int \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

A integral do lado esquerdo da equação pode ser resolvida com a seguinte mudança de variáveis (substituição trigonométrica): $u = \frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$ e $du = \frac{\sec^2\theta}{2}d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{\sqrt{1 + 4u^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(|\sqrt{1 + 4u^2} + 2u|\right)
\end{aligned}$$

Retornando para a variável y ($x > 0$):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left(|\sqrt{1+4u^2}+2u|\right) &= \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}\ln\left(|\sqrt{1+4u^2}+2u|\right) &= \ln\left(|x|\right)+K \Leftrightarrow \\
\ln\left(|\sqrt{1+\frac{4y^2}{x^2}}+\frac{2y}{x}|\right) &= 2\ln\left(x\right)+K(x>0) \Leftrightarrow \\
\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+4y^2}+2y\right) &= Cx^2, C\neq 0
\end{aligned}
$$

Assim, a solução da equação é dada por: $\sqrt{x^2+4y^2}+2y=Cx^3$, com $C\neq 0$

(b) A equação dada é uma equação linear que admite um fator integrande $I(x)$ igual a:

$$
I(x)=e^{\int -2x\,dx}=e^{-x^2}
$$

Multiplicando a equação por $I(x)$:

$$
\begin{aligned}
e^{-x^2}y'-2xye^{-x^2} &= xe^{-x^2} \Leftrightarrow \\
\frac{d\left(e^{-x^2}y\right)}{dx} &= xe^{-x^2} \Leftrightarrow \\
\int d\left(e^{-x^2}y\right) &= \int xe^{-x^2}\,dx \Leftrightarrow \\
e^{-x^2}y &= -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C \Leftrightarrow \\
y &= Ce^{x^2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Assim, a solução da equação é dada por: $y=Ce^{x^2}-\frac{1}{2}$, com $C\in\mathbb{R}$

Questão 2: (3,0 pontos) Dê a solução geral de:

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$$

($y = e^x$ é uma solução da equação homogênea associada)

Solução: A outra solução da equação homogênea associada y_2 é dada por $y_2 = fe^x$

$$\begin{aligned} y_2' &= f'e^x + fe^x \\ y_2'' &= f''e^x + 2f'e^x + fe^x \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned} (x-1)(f''e^x + 2f'e^x + fe^x) - x(f'e^x + fe^x) + fe^x &= 0 \\ (x-1)e^x f'' + [2(x-1)e^x - xe^x]\, f' + [(x-1)e^x - xe^x + e^x]\, f &= 0 \\ (x-1)e^x f'' + (x-2)e^x f' &= 0 \end{aligned}$$

A equação obtida pod ser resolvida separando-se as variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f'} &= -\frac{(x-2)}{(x-1)}dx \\ \ln(|f'|) &= \int \frac{1}{x-1} - 1\, dx \\ \ln(|f'|) &= \ln(|x-1|) - x + K \\ f' &= Ce^{-x}(x-1) \\ f &= \int Ce^{-x}(x-1)\, dx \\ f &= \int Cxe^{-x}\, dx - \int Ce^{-x}\, dx \\ f &= -Ce^{-x}(x+1) + Ce^{-x} \\ f &= Cxe^{-x} \text{ com } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Assim, uma solução $y_2 = fe^x$ é $y_2 = x$

Para encontrar a solução da equação particular, utiliza-se o método da variação dos parâmetros: procurar solução da forma $y_P = v_1y_1 + v_2y_2$, tal que:

$$\begin{bmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(x-1)^2}{(x-1)} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ (x-1) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x(x-1)}{e^x(1-x)} = xe^{-x}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & (x-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix}} = \frac{e^x(x-1)}{-e^x(x-1)} = -1$$

Integrando:

$$\begin{aligned} v_1 &= -e^{-x}(x+1) \\ v_2 &= -x \end{aligned}$$

A solução particular y_P é igual a:

$$y_P = -(x+1) - x^2$$

E a solução geral é: $y_G = y_H + y_P = C_1e^x + C_2x - (x+1) - x^2$, ou $y_G = y_H + y_P = C_1e^x + C_2x - 1 - x^2$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Questão 3: Dê a solução geral de

$$y''' + 4y' = 3\cos(2x)$$

e a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 4$, $y'(0) = y''(0) = 0$

Solução: O polinômio característico da equação é dado por: $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda = 0$ cujas raízes são $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 2i$. Assim, a solução da equação homogêna y_H é dada por:

$$y_H = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \ \text{sen}(2x)$$

com $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

A solução particular terá a forma: $y_P = Ax\cos(2x) + Bx \ \text{sen}(2x)$. Calculam-se as derivadas de y_P e, em seguida, substituem-se essas derivadas na equação diferencial:

$$y'_P = A\cos(2x) - 2Ax \ \text{sen}(2x) + B \ \text{sen}(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y''_P = -4A \ \text{sen}(2x) - 4Ax\cos(2x) + 4B\cos(2x) - 4Bx \ \text{sen}(2x)$$

$$y'''_P = -12A\cos(2x) + 8Ax \ \text{sen}(2x) - 12B \ \text{sen}(2x) - 8Bx\cos(2x).$$

Substituindo na equação:

$$y'''_P + 4y'_P = -8A\cos(2x) - 8B \ \text{sen}(2x) = 3\cos(2x)$$

Logo, encontra-se: $A = -\frac{3}{8}$ e $B = 0$ A solução geral da equação é:

$$y(x) = C_1 + C_2\cos(2x) + C_3 \ \text{sen}(2x) - \frac{3x\cos(2x)}{8}.$$

Com as condições iniciais dadas é possível encontrar os valores das constantes C_1, C_2, C_3. Para isso, deve-se, inicialmente, calcular as derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -2C_2 \ \text{sen}(2x) + 2C_3\cos(2x) - \frac{3\cos(2x)}{8} + \frac{6x \ \text{sen}(2x)}{8} \\
y''(x) &= -4C_2\cos(2x) - 4C_3 \ \text{sen}(2x) + \frac{6 \ \text{sen}(2x)}{8} + \frac{6 \ \text{sen}(2x)}{8} + \frac{12x\cos(2x)}{8} \\
y(0) &= 4 \to C_1 + C_2 = 4 \\
y'(0) &= 0 \to C_3 = \frac{3}{16} \\
y''(0) &= 0 \to C_2 = 0 \to C_1 = 4.
\end{aligned}$$

Assim, a solução pedida é

$$y(x) = 4 + \frac{3}{16} \ \text{sen}(2x) - \frac{3x\cos(2x)}{8}$$

.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2016 - 30/08/2016

Turma B
Questão 1: (4,0 pontos) Resolva as equações

(a) $xy' = y + \sqrt{x^2 + 9y^2}$ com $x > 0$

(b) $y' - 3xy = x$

Solução:

(a) A equação dada possui coeficientes homogêneos pois $P(tx, ty) = tP(x, y)$ e $Q(tx, ty) = tQ(x, y)$. Assim, faz-se a seguinte mudança de variáveis: $y = ux$ e $y' = u + xu'$ $(x > 0)$. Substituindo na equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} x\left(u + xu'\right) &= ux + \sqrt{x^2 + 9u^2x^2} \Leftrightarrow \\ ux + x^2u' &= ux + x\sqrt{1 + 9u^2} \Leftrightarrow \\ x\frac{du}{dx} &= \sqrt{1 + 9u^2} \Leftrightarrow \\ \frac{du}{\sqrt{1 + 9u^2}} &= \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \\ \int \frac{du}{\sqrt{1 + 9u^2}} &= \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

A integral do lado esquerdo da equação pode ser resolvida com a seguinte mudança de variáveis (substituição trigonométrica): $u = \frac{\operatorname{tg}\theta}{3}$ e $du = \frac{\sec^2\theta}{3}d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{1 + 9u^2}} &= \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}\,d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{\sec^{\theta}}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{3}\int \sec\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta\right)| = \frac{1}{3}\ln\left(|\sqrt{1 + 9u^2} + 3u|\right) \end{aligned}$$

Retornando para a variável y $(x > 0)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\ln\left(|\sqrt{1+9u^2}+3u|\right) &= \int \frac{dx}{x} \\
\frac{1}{3}\ln\left(|\sqrt{1+9u^2}+3u|\right) &= \ln(|x|)+K \\
\ln\left(|\sqrt{1+\frac{9y^2}{x^2}}+\frac{3y}{x}|\right) &= 3\ln(|x|)+K, (x>0) \\
\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+9y^2}+3y\right) &= Cx^3, C\neq 0
\end{aligned}
$$

Assim, a solução da equação é dada por: $\sqrt{x^2+9y^2}+3y = Cx^4$, com $C \neq 0$.

(b) A equação dada é uma equação linear que admite um fator integrande $I(x)$ igual a:

$$I(x) = e^{\int -3x\,dx} = e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Multiplicando a equação por $I(x)$:

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{3x^2}{2}}y' - 3xye^{-\frac{3x^2}{2}} &= xe^{-\frac{3x^2}{2}} \Leftrightarrow \\
\frac{d\left(e^{-\frac{3x^2}{2}}y\right)}{dx} &= xe^{-\frac{3x^2}{2}} \Leftrightarrow \\
\int d\left(e^{-\frac{3x^2}{2}}y\right) &= \int xe^{-\frac{3x^2}{2}}\,dx \Leftrightarrow \\
e^{-\frac{3x^2}{2}}y &= -\frac{1}{3}e^{-\frac{3x^2}{2}} + K \Leftrightarrow \\
y &= Ce^{\frac{3x^2}{2}} - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Assim, a solução da equação é dada por: $y = Ce^{\frac{3x^2}{2}} - \frac{1}{3}$, com $C \in \mathbb{R}$

Questão 2: (3,0 pontos) Dê a solução geral de:

$$(x+1)y'' + xy' - y = (x+1)^2$$

($y = e^{-x}$ é uma solução da equação homogênea associada)

Solução: A outra solução da equação homogênea associada y_2 é dada por $y_2 = fe^{-x}$

$$\begin{aligned} y_2' &= f'e^{-x} - fe^{-x} \\ y_2'' &= f''e^{-x} - 2f'e^{-x} + fe^{-x} \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned} (x+1)(f''e^{-x} - 2f'e^{-x} + fe^{-x}) + x(f'e^{-x} - fe^{-x}) - fe^{-x} &= 0 \\ (x+1)e^{-x}f'' + \left[-2(x+1)e^{-x} + xe^{-x}\right] f' + \left[(x+1)e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x}\right] f &= 0 \\ (x+1)e^{-x}f'' - (x+2)e^{-x}f' &= 0 \end{aligned}$$

A equação obtida pod ser resolvida separando-se as variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f'} &= \frac{(x+2)}{(x+1)}dx \\ \ln\left(|f'|\right) &= \int 1 + \frac{1}{x+1}\, dx \\ \ln\left(|f'|\right) &= \ln(|x+1|) + x + K \\ f' &= Ce^x(x+1) \\ f &= \int Ce^x(x+1)\, dx \\ f &= \int Cxe^x\, dx + \int Ce^x\, dx \\ f &= Ce^x(x-1) + Ce^x \\ f &= Ce^x x, \text{ com } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, uma solução $y_2 = fe^{-x}$ é igual a $y_2 = x$

Para encontrar a solução da equação particular, utiliza-se o método da variação dos parâmetros: procurar solução da forma $y_P = v_1y_1 + v_2y_2$, tal que:

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & x \\ -e^{-x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(x+1)^2}{(x+1)} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ (x+1) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & x \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x(x+1)}{e^{-x}(x+1)} = -xe^{x}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & (x+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & x \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x}(x+1)} = 1$$

Integrando:

$$\begin{aligned} v_1 &= -e^{x}(x-1) \\ v_2 &= x \end{aligned}$$

A solução particular y_P é igual a:

$$y_P = -(x-1) + x^2$$

E a solução geral é: $y_G = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 x - (x-1) + x^2$, ou $y_G = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 x + 1 + x^2$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Questão 3: Dê a solução geral de

$$y''' + 9y' = 5\ \text{sen}\,(3x)$$

e a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 3$, $y'(0) = y''(0) = 0$

Solução: O polinômio característico da equação é dado por: $P(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda = 0$ cujas raízes são $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 3i$. Assim, a solução da equação homogêna y_H é dada por:

$$y_H = C_1 + C_2 \cos(3x) + C_3\ \text{sen}\,(3x)$$

A solução particular terá a forma: $y_P = Ax\cos(3x) + Bx\ \text{sen}\,(3x)$. Calculam-se as derivadas de y_P e, em seguida, substituem-se essas derivadas na equação diferencial:

$$y_P' = A\cos(3x) - 3Ax\ \text{sen}\,(3x) + b\ \text{sen}\,(3x) + 3Bx\cos(3x)$$

$$y_P'' = -6A\ \text{sen}\,(3x) - 9Ax\cos(3x) + 6B\cos(3x) - 9Bx\ \text{sen}\,(3x)$$

$$y_P''' = -27A\cos(3x) + 27Ax\ \text{sen}\,(3x) - 27B\ \text{sen}\,(3x) - 27Bx\cos(3x)$$

Substituindo na equação:

$$y_P''' + 9y_P' = -18A\cos(3x) - 18B\ \text{sen}\,(3x) = 5\cos(3x)$$

Logo, encontra-se: $A = 0$ e $B = -\frac{5}{18}$ A solução geral da equação é:

$$y(x) = C_1 + C_2\cos(3x) + C_3\ \text{sen}\,(3x) - \frac{5x\ \text{sen}\,(3x)}{18}$$

Com as condições iniciais dadas é possível encontrar os valores das constantes C_1, C_2, C_3. Para isso, deve-se, inicialmente, calcular as derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -3C_2\ \text{sen}\,(3x) + 3C_3\cos(3x) - \frac{5\ \text{sen}\,(3x)}{18} - \frac{5x\cos(3x)}{6} \\
y''(x) &= -9C_2\cos(3x) - 9C_3\ \text{sen}\,(3x) + \frac{5x\ \text{sen}\,(3x)}{2} - \frac{5\cos(3x)}{3} \\
y(0) &= 3 \Rightarrow C_1 + C_2 = 3 \\
y'(0) &= 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\
y''(0) &= 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{5}{27} \Rightarrow C_1 = \frac{86}{27}
\end{aligned}$$

Assim, a solução pedida é:

$$y(x) = \frac{86}{27} - \frac{5}{27}\cos(3x) - \frac{5x\ \text{sen}\,(3x)}{18}$$