

**Turma A**

**1ª Questão:** (3,0) Determine se cada série abaixo converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

(a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[4]{n^3 + 1}}$$

(b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n^2)}{(n + \sqrt{n})^5}$$

(c) 
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

**Solução:**

(a) Como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[4]{n^3 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{7}{12}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^3}}} = +\infty$$

Temos que o limite  $\frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[4]{n^3 + 1}}$  não existe e, pelo Critério do Termo Geral, a série DIVERGE.

(b)

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \cos(n^2)}{(n + \sqrt{n})^5} \right| \leq \frac{1}{n^5}$$

Como a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$  converge (série harmônica de grau  $p$ , com  $p > 1$ ), pelo Critério da Comparação a série dada CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

(c) Temos que:

$$\left| (-1)^{n+1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \right| \leq \tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

Temos também:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)} = 1$$

Como a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$  diverge, pelo Critério da Comparação no Limite, a série dada diverge em módulo.

Por outro lado, em  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , a função  $\tan x$  é crescente, e portanto, conforme  $n$  cresce,  $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$  decresce e  $\tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) > 0$ . Logo, pelo Critério das Séries Alternadas, a série dada converge.

Como diverge em módulo, a série CONVERGE CONDICIONALMENTE.

**2ª Questão:**

- (a) (2,0) Obtenha todos os valores de  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n \ln(n)}$  converge.
- (b) (1,0) Ache o desenvolvimento em série de potências de  $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$  para  $|x| < 1$ .

**Solução:**

- (a) Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2x|^{n+1}}{(n+1) \ln(n+1)} \cdot \frac{n \ln(n)}{|2x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |2x| \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Sendo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ , teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |2x|$$

Pelo Critério da Razão, a série converge absolutamente para  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$  e diverge se  $|x| > \frac{1}{2}$ .

Para  $x = \frac{1}{2}$ , obteremos a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

Se  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ , temos que  $f$  é decrescente, contínua e positiva, para  $x > 2$ , com  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Logo, podemos aplicar o Critério da Integral, já que  $f(n) = \frac{1}{n \ln(n)}$ .

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln(x)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = \infty$$

Portanto a série diverge para  $x = \frac{1}{2}$ .

Para  $x = -\frac{1}{2}$ , a série obtida é  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$ , que converge pelo Critério das Séries Alternadas, já que  $\frac{1}{n \ln(n)} > 0$  para  $n > 2$ ; e  $\frac{1}{n \ln(n)}$  decresce, já que  $\ln(x)$  é uma função crescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln(n)} = 0$ .

(b) Primeiramente, temos que:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x| > 1$$

Derivando:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} \quad |x| > 1$$

Portanto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n+1} \quad |x| > 1$$

**3ª Questão:** (4,0) Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique a resposta.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) = 0$ .
- (b) A sequência  $a_n = \sqrt[n]{n + (-1)^n n}$  não converge.
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 3n} - n \right) = \infty$ .
- (d) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p-1}}{n^p + 1}$  diverge para todo  $p > 0$ .

**Solução:**

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{y}{2} \right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) = 0$  é FALSA.

- (b) Quando  $n$  é par,  $a_n = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$ ; e quando  $n$  é ímpar  $a_n = 0$ .  
Logo, a sequência diverge, já que  $a_{2n+1}$  converge para zero, enquanto  $a_{2n}$  converge para 1; e a afirmação é VERDADEIRA.

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 3n} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sqrt{n^2 + 3n} - n \right) \left( \sqrt{n^2 + 3n} + n \right)}{\left( \sqrt{n^2 + 3n} + n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\left( \sqrt{n^2 + 3n} + n \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n \left( \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left( \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Sendo assim, a afirmação é FALSA.

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{p-1}}{n^p + 1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^p + 1} = 1$$

Temos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, e então, pelo Critério da Comparação no Limite, a série dada também diverge para todo  $p > 0$ ; e a afirmação é VERDADEIRA.