Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2004 - 13/09/2005

Turma A

Questão 1.

(a) (2,5 pontos) Calcule, caso existam, os limites das sequências de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por:

(1) (1,0 ponto) $a_n = \dfrac{n^p}{2^n}, p \in \mathbb{R}$

(2) (1,0 ponto) $a_n = \dfrac{1}{8^n}\Big(\dfrac{2n+8}{n+3}\Big)^{3n}$

(b) (1,0 ponto) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável no zero e $f(0) = 0$, mostre que $nf(\frac{1}{n}) \to f'(0)$

Solução:

(a) (1) Se $p \leq 0$, então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{2^n} = 0$ já que $n^0 = 1$ e $\lim_{n\to\infty} n^p = 0$ se $p < 0$.

Se $p > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k-1 < p \leq k$. Aplicando a regra de l'Hospital k vezes, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)x^{p-k}}{(\ln 2)^k 2^x} = 0$$

uma vez que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p-k}}{2^x} = 0$, pois $p-k \leq 0$. Note que em todas as etapas anteriores obtemos 0 sobre 0 e, portanto, podemos aplicar a regra de l'Hospital. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{2^n} = 0.$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8^n}\Big(\frac{2n+8}{n+3}\Big)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8^n} \frac{2^{3n}n^{3n}(1+\frac{8}{2n})^{3n}}{n^{3n}(1+\frac{3}{n})^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(1+\frac{4}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^n}\right]^3 = (e^{4-3})^3 = e^3$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^3.$$

(b) Como $f(0) = 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}}$$

Como f é derivárel em 0, temos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = f'(0).\ c.q.d.$$

Questão 2. Determine se cada uma das séries abaixo converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

(a) (1,0 ponto) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(b) (1,5 ponto) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2+n^2)}{n\ln^2(n+1)}$.

(c) (1,5 ponto) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}^p\left(\dfrac{1}{n+2}\right), p>0$ (discutir em função de p).

Solução:

(a) Seja $a_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. Temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}.\frac{n!^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}.(2n+2)(2n+1) = 4$$

Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}| > |a_n|$, para todo $n \geq n_0$ e, portanto, a seqüência $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ é estritamente crescente. Isso implica que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ [De fato, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, o que é um absurdo]. Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ é divergente.

(b)

$$\left|\frac{\cos(2+n^2)}{n\ln^2(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n\ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{n\ln^2 n}$$

Como $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ é decrescente $\forall x>0$, contínua, positiva e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, temos, pelo Critério da Integral, que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2+n^2)}{n\ln^2(n+1)}$ converge se, e somente se, a integral imprópria $\int_2^{\infty} f(x)dx$ convergir. Mas,

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Logo, a série dada converge absolutamente.

(c) Seja $b_n = \operatorname{sen}^p\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$ e $a_n = (-1)^n b_n$. Comparando-se no limite a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ com a série $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)^p}$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^p\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\frac{1}{(n+2)^p}} = 1$$

e sabemos que $\sum \dfrac{1}{(n+2)^p}$ converge para $p>1$ e diverge para $p \leq 1$. Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente se $p>1$.

Agora, como $\operatorname{sen}^p\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$ é decrescente (já que em $[0, \frac{\pi}{2}]$ a função seno é crescente) e $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}^p\left(\dfrac{1}{n+2}\right) = 0$, temos que, pelo Critério de Leibniz, a série dada converge.

Logo, para $0 < p \leq 1$, a convergência é condicional.

Questão 3. (3,0 pontos) Encontre o raio e o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{4^n(n^2+1)}.$$

Solução:

Sabemos que o raio de convergência da série acima será dado por $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, caso o limite exista (finito ou infinito). Assim,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4^n(n^2+1)}.\frac{4^{n+1}((n+1)^2+1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}.4.\frac{(n+1)^2+1}{(n^2+1)} = 4$$

Portanto, a série converge absolutamente quando $x \in (-5,3)$ e diverge quando $x < -5$ ou $x > 3$.

Para $x = 3$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{4^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ que diverge, já que $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Critério da Comparação no Limite).

Para $x = -5$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{4^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$. Note que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ e se $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$, que é negativo para $x > 1$. Portanto, f é decrescente para $x > 1$. Logo, $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ é decrescente, $\forall n > 2$. Assim, pelo Critério de Leibniz, temos que a série converge quando $x = -5$.

Logo, a série dada converge se $x \in [-5,3)$.