MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2º Semestre de 2019 - 3ª Lista de Exercícios

Parte A: Equações Diferenciais de 1ª Ordem

1. Os gráficos de duas soluções de $y' = x + y^2$ podem se cruzar num ponto (x_0, y_0)?

2. Dê as soluções das equações diferenciais de 1ª ordem abaixo, com seus domínios (máximos):
   (a) $y' = y^2$ (b) $xy' = y$ (c) $yy' = x$
   (d) $y' = (1-y)(2-y)$ (e) $(x+3y) - x\dfrac{dy}{dx} = 0$ (f) $y' = 2y + e^x$

3. Determine a solução de cada um dos problemas de Cauchy (ou do valor inicial):
   (a) $y' = x + y,\ \ y(0) = 1$ (b) $(\cos t)x' - (\operatorname{sen} t)x = 1,\ \ x(2\pi) = \pi$ (c) $y' = x(1+y),\ \ y(0) = -1$

4. Dê duas soluções para cada uma das equações com a condição inicial dada:
   (a) $y' = 5y^{\frac{4}{5}}, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}(3x^2+1), \quad y(0) = 0.$

5. Resolva as equações:

   (a) $y' = e^{x-2y}$ (b) $x^2y^2\dfrac{dy}{dx} = 1 + x^2$
   (c) $y' \operatorname{sen} x + y\cos x = 1$ (d) $y' = x^3 - 2xy$
   (e) $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right) + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$ (f) $(1-xy) + (xy - x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$
   (g) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$ (h) $(1+t^2)y' + ty + (1+t^2)^{5/2} = 0$
   (i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \cos^2(\dfrac{y}{x})$ (j) $(1-xy)y' = y^2$
   (k) $xy' = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x > 0$

6. Resolva as equações:
   (a) $(x+y)dx + xdy = 0$ (b) $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$
   (c) $\cos x dy = (1 - y - \operatorname{sen} x)dx$ (d) $y(x^2+y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$
   (e) $e^x \operatorname{sen} y dx + e^x \cos y dy = y \operatorname{sen}(xy)dx + x\operatorname{sen}(xy)dy$

   Determine as soluções dos exercícios (a), (b) e (d) que passam pelo ponto (1,1).

7. As equações diferenciais podem sugerir mudanças de coordenadas. Por exemplo, para resolver a equação
   $$(x+2y-1)dx + 3(x+2y)dy = 0\,,$$
   podemos fazer $x + 2y = v$.
   Neste caso, $dx + 2dy = dv$, ou seja, $dx = dv - 2dy$. Substituindo, obtemos a seguinte equação diferencial:
   $$\begin{aligned}(v-1)(dv-2dy) + 3vdy &= 0\\ (v-1)dv + (v+2)dy &= 0\\ \frac{v-1}{v+2}dv + dy &= 0\,.\end{aligned}$$
   A solução desta última é:
   $$v - 3\ln|v+2| + y + c = 0\,.$$
   Lembrando que $v = x + 2y$, obtemos:
   $$x + 3y + C = 3\ln|x+2y+2|\,.$$
   Resolver as equações abaixo, usando uma conveniente mudança de coordenadas:

(a) $(1+3x\operatorname{sen} y)dx - x^2\cos y dy = 0$ (sugestão $\operatorname{sen} y = w$)

(b) $(3x-2y+1)dx-(3x-2y+3)dy=0$

(c) $\cos(x+y)dx = x\operatorname{sen}(x+y)dx + x\operatorname{sen}(x+y)dy$

8. Mostre que a substituição $z = ax+by+c$ transforma a equação $y' = f(ax+by+c)$ numa equação de variáveis separáveis. Aplique esse método para resolver as equações

   (a) $y' = (x+y)^2$ (b) $y' = \operatorname{sen}^2(x-y+1)$ (c) $(x+2y-1)dx + 3(x+2y)dy = 0$.

9. **Equação diferencial de Bernoulli.** É uma equação diferencial não linear de 1ª ordem da forma

   $$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{B}$$

   onde n é uma constante real diferente de 0 e 1. Se $n=1$, (B) é uma equação linear homogênea. Observe que $y=0$ é sempre uma solução de (B). Para achar outras soluções, mostre que a mudança $z = y^{-n+1}$ transforma (B) na equação linear

   $$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

   Use esse método para resolver as seguintes equações:

   (a) $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$ (b) $y' = y + e^{-3x}y^4$

   (c) $2x^3y' = y(y^2+3x^2)$ (que também é homogênea!) (d) $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$

10. **Equações de Riccati.** É uma equação diferencial de primeira ordem que é quadrática na função desconhecida, isto é

    $$y' = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^2$$

    onde $q_1(x) \neq 0$ e $q_3(x) \neq 0$. Se $q_1(x) = 0$, a equação se reduz a uma equação de Bernoulli e se $q_3(x) = 0$ a equação se torna linear de primeira ordem. Suponha que alguma solução particular y_1 dessa equação é conhecida. Uma solução mais geral contendo uma constante arbirtrária pode ser obtida através da substituição

    $$y = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

    Mostre que $v(t)$ satisfaz a equação linear de primera ordem

    $$v' = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

11. Usando o método do problema anterior e a solução particular dada, resolva cada uma das equações de Ricatti a seguir:

    (a) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$ e $y_1(t) = t$

    (b) $y' = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y}{t} + y^2$ e $y_1(t) = \dfrac{1}{t}$

    (c) $y' = \dfrac{2\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t) + y^2}{2\cos(t)}$ e $y_1(t) = \operatorname{sen}(t)$

12. Exercícios sobre equações diferenciais exatas e fatores integrantes.

    (a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial $y^2 \operatorname{sen} x dx + yf(x)dy = 0$.

    (b) A equação $g(x)dy + (y+x)dx = 0$ tem $h(x) = x$ como fator integrante. Determine todas as possíveis funções g.

    (c) A equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $f(x,y) = e^{ax}\cos y$. Determine a e resolva a equação.

    (d) Ache um fator integrante da forma $h(x,y) = x^n y^m$ para a equação $y(y^2+1)dx + x(y^2-1)\ln x dy = 0$ e resolva-a.

(e) Ache um fator integrante da forma $\mu = \mu(x+y^2)$ para a equação $(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0$.

(f) Ache um fator integrante da forma $\mu = \mu(x^2+y^2)$ para a equação $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$.

13. Determine uma função $y = f(x)$ definida num intervalo I cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 5/4)$ e tal que, para todo $t > 0$, $t \in I$, o comprimento do gráfico de $y = f(x)$, $0 \leq x \leq t$, seja igual à área da região do plano determinda por todos os pontos (x, y) que satisfazem $0 \leq x \leq t$ e $0 \leq y \leq f(x)$.

14. Determine uma função $y = f(x)$ cujo gráfico passe pelo ponto (1,1) e tal que, para todo p em seu domínio, a área do triângulo com vértices $(p, 0)$, $(p, f(p))$ e M seja 1, onde M é o ponto de intersecção da reta tangente ao gráfico em $(p, f(p))$ com o eixo x.

15. Considere um tanque usado em determinados experimentos hidrodinâmicos. Após um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta a uma concentração de 1 g/l. Para preparar o próximo experimento, o tanque tem que ser lavado com água fresca entrando a uma taxa de 2 litros por minuto, a solução bem misturada saindo à mesma taxa. Encontre o tempo necessário para que a concentração de tinta no tanque atinja 1% de seu valor original.

16. Na ausência de outros fatores, a população de mosquitos em determinada área cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho e dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores (pássaros, morcegos, etc) comem 20.000 mosquitos/dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t.

17. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto muda a uma taxa proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente que o rodeia. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café estava a uma temperatura de 200ºF (cerca de 93ºC) ao ser colocado na xícara e, 1 minuto depois, esfriou para 190ºF em uma sala a 70ºF, determine quando o café atinge a temperatura de 150ºF.

RESPOSTAS - Parte A

2. (a) $y \equiv 0, x \in \mathbb{R}$; $y = \frac{1}{a-x}$, $x < a$ ou $x > a$, onde $a \in \mathbb{R}$. (b) $y = ax$, $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$.
(c) $y = \sqrt{x^2+k}$ e $y = -\sqrt{x^2+k}$, $x^2 > -k$ se $k < 0$, $x \in \mathbb{R}$ se $k > 0$ e $x < 0$ ou $x > 0$ se $k = 0$.
(d) $y \equiv 1, x \in \mathbb{R}$, $y \equiv 2, x \in \mathbb{R}$; $y = \frac{ke^x - 2}{ke^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}$ se $k \leq 0$ e $x < -\ln k$ ou $x > -\ln k$ se $k > 0$.
(e) $y = ax^3 - \frac{x}{2}$, se $x \geq 0$, e $y = bx^3 - \frac{x}{2}$, se $x < 0$. (f) $y = ae^{2x} - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

3. (a) $y = 2e^x - x - 1$, (b) $x = \frac{t-\pi}{\cos t}$, (c) $y \equiv -1$.

4. (a) $y \equiv 0$ e $y = x^5$ (b) $y \equiv 0$ e $y = (x^3+x)^3$.

5. (a) $y = \frac{1}{2}\ln(2e^x + C)$, $C \in \mathbb{R}$ (b) $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}}$, $C \in \mathbb{R}$
(c) $y = \frac{x+C}{\operatorname{sen} x}$, $C \in \mathbb{R}$ (d) $y = \frac{1}{2}(x^2-1) + Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$
(e) $x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C$, $C \in \mathbb{R}$ (f) $y^2 - 2xy + \ln x^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$
(g) $\begin{cases} y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2 \ (C \neq 0) \text{ para } x > 0 \\ y - \sqrt{x^2+y^2} = C_1,\ (C_1 \neq 0) \text{ para } x < 0 \end{cases}$ (h) $y = \frac{C - 15t - 10t^3 - 3t^5}{15\sqrt{1+t^2}}$, $C \in \mathbb{R}$
(i) $\operatorname{tg}(\frac{y}{x}) = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$ (j) $xy - \ln|y| = C$, $C \in \mathbb{R}$, ou $y = 0$
(k) $\frac{y^2 + y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} + \ln\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right| = C$, $C \in \mathbb{R}$.

6. (a) $x^2 + 2xy = C$, $C \in \mathbb{R}$ (b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2x^2y = C$, $C \in \mathbb{R}$ (c) $y = \frac{x+C}{\sec x + \operatorname{tg} x}$, $C \in \mathbb{R}$
(d) $y^3(x^2 - y^2) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ e) $e^x \operatorname{sen} y + \cos(xy) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

7. (a) $\frac{1}{x^3}\operatorname{sen} y + \frac{1}{4x^4} = C$ (b) $x - y - \ln|3x - 2y + 7| = C$ (c) $x\cos(x+y) = C$.

8. (a) $y = \operatorname{tg}(x+C) - x$, $C \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{tg}(x-y+1) = x + C$, $C \in \mathbb{R}$ (c) $y - \ln|x+2y+2| + \frac{x}{3} = C$, $C \in \mathbb{R}$.

9. (a) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{1}{6x + Cxe^{-x}}$, $C \in \mathbb{R}$ (b) $y \equiv 0$ e $y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}}$, $C \in \mathbb{R}$ (c) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{x^3}{C-x}$, $C \in \mathbb{R}$
(d) $y \equiv 0$ e $y = \frac{27x^6}{(C - \ln x^2)^3}$, $C \in \mathbb{R}$.

11. (a) $y = t + \dfrac{1}{C-t}, t \in \mathbb{R}$ (b) $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{2t}{C-t^2}, t \in \mathbb{R}$ (c) $y = \operatorname{sen} t + \dfrac{2}{2C\cos t - \operatorname{sen} t}, t \in \mathbb{R}$

12. (a) $f(x) = C - 2\cos x, C \in \mathbb{R}$ (b) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$ (c) $a = -1; x + e^{-x}\operatorname{sen} y = C, C \in \mathbb{R}$
(d) $n = -1; m = -2; (y^2+1)\ln x = Cy, C \in \mathbb{R}$ e $y \equiv 0$ (e) $\mu(x+y^2) = x + y^2$ (f) $\mu = (x^2+y^2)^{-3/2}$.

13. $y = \frac{e^{-x}+4e^x}{4}$. 14. $y = \frac{2}{x+1}$ ou $y = \frac{2}{3-x}$

15. $t = 100\ln 100$ minutos.

16. $P(t) = 201977,31 - 1977,31e^{(\ln 2)t}$ para $0 \le t \le 6.674$ e $P(t) = 0$ para $t \ge 6.674$ onde t é medido em semanas.

17. $\dfrac{\ln(\frac{8}{13})}{\ln(\frac{12}{13})} \cong 6,065$minutos.

Parte B: Equações Diferenciais de Ordem Superior

1. **Redução de ordem: (Variável Dependente Ausente).** Alguns tipos especiais de equações de segunda ordem podem, após uma mudança de variável, ser reduzidas a uma de primeira ordem e assim resolvidas pelos métodos conhecidos. Se na equação diferencial y não estiver presente, fazemos a mudança $z = y'$ e assim obtemos uma equação de primeira ordem. Por exemplo, a substituição $z = y'$ reduz a equação $xy'' - y' = 3x^2$ à equação linear de primeira ordem $xz' - z = 3x^2$.

   Resolva por esse método as sequintes equações:

   (a) $xy'' - y' = 3x^2$ (b) $xy'' = y' + (y')^3$ (c) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$ (d) $x^2y'' + xy' = 1$.

2. **Redução de ordem: (Variável Independente Ausente).** Se a variável x não estiver presente explicitamente na equação, introduzimos uma nova variável dependente u, fazendo $u = y' = \frac{dy}{dx}$, e temos então que $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}.\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$ e, fazendo a substituição, a equação se transforma em duas equações de 1a. ordem.

   Exemplo: Para a equação $y'' + y = 0$ obtemos $u\frac{du}{dy} + y = 0$ e $u = \frac{dy}{dx}$.

   Resolva por esse método as seguintes equações:

   (a) $y'' + 4y = 0$ (b) $y'' - 9y = 0$ (c) $yy'' + (y')^2 = 0$ (d) $yy'' = y^2y' + (y')^2$.

3. Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais:

   (a) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0; \quad y'(1) = 0; \quad y(1) = 1$.
   O que acontece com a solução com condições iniciais $y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$?

   (b) $yy'' = y^2y' + (y')^2; \quad y(0) = -\frac{1}{2}; \quad y'(0) = 1$.

4. Em cada um dos itens abaixo, verifique que a função y_1 dada é uma solução da equação dada e encontre, a partir de y_1, outra solução y_2 da mesma equação, de forma que o conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ seja linearmente independente. Mostre que o conjunto obtido é linearmente independente:

   (a) $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y_1 = x^2$;
   (b) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y_1 = x$;
   (c) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0, \quad y_1 = x$;
   (d) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y_1 = x$;
   (e) $xy'' + 3y' = 0, \quad y_1 = 1$;
   (f) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \quad y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x$;
   (g) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0, \quad y_1 = e^x$.

5. Determine a solução geral das equações:

   (a) $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$ (b) $y'' - f(x)y' + (f(x)-1)y = 0$.

6. Determine todas as soluções das equações:

(a) $y'' + 2y' + y = 0$	(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$	(c) $y''' - y'' + y' - y = 0$
(d) $2y'' - 4y' + 8y = 0$	(e) $y'' - 9y' + 20y = 0$	(f) $2y'' + 2y' + 3y = 0$
(g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$	(h) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + y = 0$	(i) $\dfrac{d^5y}{dx^5} + 2\dfrac{d^3y}{dx^5} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

7. Uma equação linear da forma $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$, onde α e β são constantes reais, é chamada **equação de Euler** de segunda ordem. Mostre que a mudança de variável $x = e^z$ se $x > 0$ (e $x = -e^z$ se $x < 0$) transforma a equação de Euler em uma equação linear de coeficientes constantes. Aplique esta técnica para determinar a solução geral das equações:

(a) $x^2y'' + xy' + y = 0$	(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$	(c) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
(d) $2x^2y'' + 10xy' + 3y = 0$	(e) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$	

8. **Princípio de Superposição**. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$ e de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$ respetivamente, mostre que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é solução de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$. Use este fato para resolver as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$	(b) $y'' + y' - 6y = \text{sen } x + xe^{2x}$	(c) $y'' + 2y' = 1 + x^2 + e^{-2x}$
(d) $y'' + y' - 2y = 6e^{-x} + 4$	(e) $y'' + y = \cos x + 8x^2$	

9. Resolva. (a) $xy'' - y' = 3x^2$, (b) $x^2y'' + xy' - y = x^2$, (c) $y''' + y' = \sec x$.

10. Determine a solução geral das seguintes equações:

(a) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$	(b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$
(c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x$	(d) $y'' - 2y' = 12x - 10$
(e) $y'' + y = 2\cos x$	(f) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$
(g) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x+1)^2$	(h) $y'' + 4y = 3\,\text{sen}\, x$
(i) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$	(j) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$
(k) $y'' + y' - 2y = 8\,\text{sen } x$	(l) $y'' - 3y' = x + \cos x$
(m) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} = x^3$	(n) $y''' - y = x^3 - 1$
(o) $y'' - 2y = 2e^x(\cos x - \text{sen}\, x)$	

11. Discutir o comportamento das soluções das equações seguintes, e sua interpretação física:

    (a) Equação homogênea de mola:
    $$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = 0, \quad (\mu \geq 0).$$

    (b) Equação da mola com segundo membro periódico, sem atrito
    $$x'' + \alpha^2 x = \beta\,\text{sen}(\omega t).$$

    (c) Equação da mola com segundo membro periódico, com atrito
    $$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = \beta\,\text{sen}(\omega t), \quad (\mu \geq 0).$$

12. Ache a solução geral da equação diferencial dada, em série de potências centradas em 0.
(a) $y'' - xy' - y = 0$ (b) $y'' - x^2y = 0$ (c) $y'' + 2xy' + 4y = 0$

13. Uma equação diferencial da forma $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, onde p é um numero real fixado, é chamada **equação de Bessel** de ordem p.

(a) Se $p = 0$, mostre que $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ e $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) x^{2n}$ são soluções LI da equação de Bessel.

(b) Se $p = 1$ mostre que $y = x\left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2!3!} - \frac{x^6}{2^6 2!3!4!} + ...\right)$ é solução.

RESPOSTAS - Parte B

1. (a) $y(x) = x^3 + C_1x^2 + C_2$ (b) $y(x) = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2x^2} + C_2$, ou $y =$ cte
(c) $y(x) = -\frac{x^2}{2} - C_1x - C_1^2 \ln|x - C_1| + C_2$, ou $y =$ cte (d) $y(x) = \frac{\ln^2|x|}{2} + C_1 \ln|x| + C_2$

2. (a) $y(x) = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x$ (b) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$
(c) $y^2 = C_1x + C_2$ (d) $y = C_2(C_1 + y)e^{C_1x}$, ou $y =$ cte

4. (a) $y_2 = C_1x^2 + C_2x^{-2}$ (c) $y_2 = C_1x + C_2e^x$ (e) $y_2 = C_1 + C_2x^{-2}$ (g) $y^2 = C_1e^x + C_2e^x x^2$.

5. (a) $y(x) = C_1x + C_2x \int x^{-2} e^{\int x\, f(x)dx} dx$ (b) $y(x) = C_1e^x + C_2e^x \int e^{-2x + \int f(x)dx} dx$.

6. (a) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ (b) $y(x) = C_2e^{2x} + C_2xe^{2x}$
(c) $y(x) = C_1e^x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x$ (d) $y(x) = e^x(C_1 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + C_2 \cos \sqrt{3}x)$
(e) $y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{4x}$ (f) $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x)$
(g) $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$ (i) $y(x) = C_1 + (C_2 + C_4x)\cos x + (C_3 + C_5x) \operatorname{sen} x$
(h) $y(x) = (C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}x)e^{x\sqrt{2}/2} + (C_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}x)e^{-x\sqrt{2}/2}$

7. (a) $y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x)$ (b) $y(x) = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$
(c) $y(x) = x^{-1}[C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x^3)]$ (d) $y(x) = C_1x^{-2+\frac{\sqrt{10}}{2}} + C_2x^{-2-\frac{\sqrt{10}}{2}}$
(e) $y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-4}$

8. (a) $y(x) = \frac{e^x}{6} + \frac{e^{2x}}{12} + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ (b) $y(x) = -\frac{1}{50}\cos x - \frac{7}{50}\operatorname{sen} x + (\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x + C_1)e^{2x} + C_2e^{-3x}$
(c) $y(x) = \frac{3}{4}x + \frac{x^3}{6} + (C_2 - \frac{1}{2}x)e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + C_1$ (d) $y(x) = -3e^{-x} - 2 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$
(e) $y(x) = (\frac{1}{2}x + C_1)\operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 8x^2 - 16$

9. (a) $A + Bx^2 + x^3$ (b) $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$
(c) $y = A + B \operatorname{sen} x + C \cos x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \ln|\cos x| - x\cos x$.

10. (a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$
(b) $y(x) = -e^{-x}(8x^2 + 4x) + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$
(c) $y(x) = \frac{1}{2}xe^{-x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x \ln|\cos 2x| + C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\operatorname{sen} 2x$
(d) $y(x) = -3x^2 + 2x + C_1 + C_2e^{2x}$
(e) $y(x) = x \operatorname{sen} x + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$
(f) $y(x) = C_1x + C_2(x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$
(g) $y(x) = C_1e^x + C_2x^{-1} - 1 - x - \frac{x^2}{3}$
(h) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x$
(i) $y(x) = e^{-5x}(7x^2 + C_1x + C_2)$
(j) $y(x) = e^{2x}(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} + C_1) + C_2e^{-2x}$
(k) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{4}{5}(3\operatorname{sen} x + \cos x)$
(l) $y(x) = C_1 + C_2e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3\operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$
(m) $y(x) = C_1 + C_2x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + (C_3 + C_4x)e^x$
(n) $y(x) = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^3 - 5$
(o) $y(x) = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + e^x \operatorname{sen} x$

12. (a) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2x}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
(b) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)...4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)...5.4}$;
(c) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)...5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$