POLINÔMIOS E SÉRIES DE TAYLOR

RICARDO BIANCONI

Sumário

1. Introdução

Desenvolvimento de funções em séries de potências tem diversas aplicações, sendo uma das mais importantes a resolução de equações diferenciais. Neste texto enfocamos o problema de determinar as chamadas séries de Taylor de funções e verificar sua convergência. Primeiramente deduzimos as fórmulas dos polinômios de Taylor a partir do Teorema Fundamental do Cálculo, com o uso conveniente da técnica de *integração por partes*. A seguir apresentamos

Esta versão: junho de 2016.

a fórmula do resto de Lagrange e apresentamos os primeiros exemplos de convergência de séries de Taylor. Apresentamos as operações algébricas de soma e produto de séries de Taylor e a derivação e integração de séries. Munidos dessas ferramentas, apresentamos uma seção com diversos exemplos mais elaborados. Nos apêndices os teoremas citados são demonstrados. Uma boa referência para todo tipo de séries é a obra [5] e um livro de Cálculo com bom conteúdo de séries é [8].

No que segue, a derivada de uma função f é denotada tanto f' como $\frac{df}{dx}$, e a escolha de uma delas serve para facilitar a leitura. As derivadas de ordem $n > 0$ são denotadas $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

2. Polinômios e Séries de Taylor

Começamos deduzindo as fórmulas dos *polinômios de Taylor* de uma função f de classe C^N ou C^∞, por meio do Teorema Fundamental do Cálculo e integração por partes.

O *Teorema Fundamental do Cálculo* pode ser escrito como

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0),$$

ou $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$.

Aplicamos agora o método da integração por partes, com $u = f'(t)$ e $v' = 1$, mas escolhemos convenientemente $v(t) = t - x$, e obtemos

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \Big[(t-x)f'(t)\Big]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)\,dt \;=$$

$$= \; f'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)\,dt.$$

Com isso, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)\,dt$.

Façamos o mesmo mais duas vezes para percebermos o padrão.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} \frac{f'''(t)}{2}(t - x)^2\,dt$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \; +$$

$$+ \; \frac{f''(x_0)}{3 \cdot 2}(x - x_0)^3 - \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(4)}(t)}{3 \cdot 2}(t - x)^3\,dt$$

Isso sugere o padrão

$$f(x) = P_n(x) + (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n\,dt,$$

com

$$\boxed{P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.}$$

De fato, pelo Princípio da Indução Finita, essas expressões são válidas para $n = 0$ e, para confirmar a validade dela para qualquer n, basta mostrar que se valer para algum $n \geq 0$ então também valerá para o passo seguinte, $n+1$. Mas isso sai da aplicação do método da integração por partes, como viemos fazendo.

Definição 1. O polinômio P_n acima é o **polinômio de Taylor** de grau n da função f e, se f for de classe C^∞ em torno do ponto x_0, então a sequência $n \mapsto P_n(x)$ é a **série de Taylor** da função f centrada em x_0, e denotamos tal série resumidamente como $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$.

No Apêndice B, páginas 32 e seguintes, deduzimos a unicidade das séries de Taylor.

Teorema 1 (Unicidade da Série de Taylor)**.** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiver raio de convergência não nulo e se no intervalo de convergência $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, então $a_0 = f(0)$ e para todo $n > 0$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Exemplo 1 (Funções pares e ímpares)**.** Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ for função par ($f(-x) = f(x)$), então $f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$. A unicidade da série de Taylor de f implica $a_n = 0$, para todo n ímpar. Daí, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$.

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ for função ímpar ($f(-x) = -f(x)$), então $f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -f(x)$. A unicidade da série de Taylor de f implica $a_n = 0$, para todo n par. Daí, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$.

---

3. Fórmulas do Resto e Convergência

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ que convergir em um ponto $x_1 \neq x_0$, convergirá absolutamente em qualquer $x \in\,]x_0 - x_1, x_0 + x_1[$, pois $a_n(x_1 - x_0)^n \to 0$ e, daí, para algum n_0, se $n \geq n_0$, $|a_n(x_1 - x_0)^n| < 1$ e, portanto,

$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(x_1-x_0)^n| \frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} < \frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n}$. Assim, o módulo do termo geral da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ fica menor que a de uma série geométrica de razão $\frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} < 1$, se $n \geq n_0$. O **raio de convergência** da série é $R = \sup\{|x-x_0|: \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ converge}\}$ e o **intervalo de convergência** é o conjunto dos pontos em que ela converge ($|x-x_0| < R$ e, talvez, $x = x_0 \pm R$).

Se a função f for de classe C^∞ numa vizinhança aberta do ponto x_0 e se existir um intervalo $I =]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$ dentro dessa vizinhança, tal que para todo $x \in I$, $P_n(x) \to f(x)$, então diremos que f é uma **função analítica**, e escrevemos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Veremos neste texto alguns exemplos de funções analíticas.

Podemos escrever $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, com

$$\boxed{R_n(x) = (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt,}$$

o **resto** ou **erro** de aproximação, em sua **forma integral**. O resultado a seguir facilita a estimativa do erro de aproximação.

Teorema 2 (**Resto de Lagrange**). Seja f uma função de classe C^{n+1} em uma vizinhança U do ponto x_0. Para cada $x \in U$, $x \neq x_0$, existe um ponto $\bar{x}$ estritamente entre x_0 e x (isto é, $x_0 < \bar{x} < x$ ou $x < \bar{x} < x_0$, conforme a posição de x em relação a x_0), tal que

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},}$$

Demonstração. A função f é de classe C^{n+1}. Sua derivada de ordem $n+1$ é contínua em uma vizinhança do intervalo $I = [x_0, x]$ (se $x > x_0$) ou $I = [x, x_0]$ (se $x < x_0$). Daí, existem $m = \min\{f^{(n+1)}(t) : t \in I\}$ e $M = \max\{f^{(n+1)}(t) : t \in I\}$, e as desigualdades

$$m \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!}\, dt \leq \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \leq M \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!}\, dt,$$

implicam a existência de A, tal que $m \leq A \leq M$ e

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = A \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!}\, dt.$$

A continuidade de $f^{(n+1)}(t)$ em I implica existir um ponto $\bar{x}$ no interior de I, tal que $f^{(n+1)}(\bar{x}) = A$. Da expressão

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!}\, dt = -(-1)^{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

obtemos a fórmula desejada. □

Um resultado importante para aplicações é o chamado Teorema de Abel, cuja demonstração encontra-se no Apêndice A, páginas 29 e seguintes.

Teorema 3. (Abel) Suponha que a série de Taylor de $f(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, tenha raio de convergência $R > 0$ finito. Se f for contínua (à esquerda) em $x_0 + R$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ for convergente, então $f(x_0 + R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$

As funções elementares do Cálculo são analíticas. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2 (Polinômios)**.** Se $f(x) = a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então sua série de Taylor é a sequência $a_0,\ a_0 + a_1 x,\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ \ldots,\ a_0 + \cdots + a_{N-1}x^{N-1},\ f(x),\ f(x),\ f(x),\ \ldots$, ou seja, é constante a partir do índice N.

Se for centrada em um outro ponto x_0, então sua série de Taylor é a_0, $a_0 + (a_1 + 2a_2x_0 + \cdots + Na_Nx_0^{N-1})(x-x_0)$, $a_0 + (a_1 + 2a_2x_0 + \cdots + Na_Nx_0^{N-1})(x-x_0) + (2a_2 + 3.2a_3x_0^2 + \cdots + N(N-1)a_Nx_0^{N-2})\frac{(x-x_0)^2}{2}$, etc, mas mesmo assim, é uma sequência que permanece constante a partir do índice N.

Exemplo 3 (A série geométrica)**.** Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

donde concluímos que para $|x| < 1$ vale

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Como $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$, essa é a série de Taylor de $f(x)$.

Temos também

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

O erro $R_n(x) = \pm x^{n+1}/(1+x)$ tende a zero, se n tender a ∞, e, assim, para $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Exemplo 4 (A série geométrica centrada em x_0)**.** Se $x_0 \neq 1$, podemos fazer

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)} = \frac{1}{(1-x_0)}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)}\right]$$

Se $\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| < 1$, ou $|x-x_0| < |1-x_0|$, vale a igualdade

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^n.$$

Exemplo 5 (O logaritmo)**.** Como $\frac{d\ln(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \pm x^{n+1}/(1+x)$, integramos esta última expressão e o erro em módulo $|R_n(x)| = |\int_{x_0}^{x} t^n/(1+t)\,dt| \leq \max\{1; 1/(1+x)\}|x|^{n+1}/(n+1) \to 0$. Obtemos, para $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

O Teorema de Abel garante que essa igualdade vale também para $x = 1$, pois a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$ converge:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdots$$

Exemplo 6 (O logaritmo centrado em $x_0 = 2$)**.** Como $\frac{d^n\ln(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ a série de Taylor de $\ln x$ em torno do ponto $x_0 = 2$ é

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n3^n},$$

com raio de convergência $R = 3$. A fórmula do erro de Lagrange é $R_n(x) = (-1)^n(x-2)^{n+1}/[(n+1)(1+\bar{x})^n]$, com $\bar{x}$ entre 2 e x. Para provarmos que esta série converge para $\ln x$, essa fórmula é boa se $x \geq 0$, mas é difícil de majorar no caso de $-1 < x < 0$. Melhor alternativa é fazer

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+(x-2)/3}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-2)^k}{3^{k+1}} + (-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n+1}}{3^{n+2}(1+x)}$$

Integramos ambos os lados dessa equação e obtemos

$$\ln x - \ln 2 = \int_2^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)} + (-1)^{n+1}\int_2^x \frac{(t-2)^{n+1}}{3^{n+2}(1+t)}\,dt$$

A estimativa

$$\left|\int_2^x \frac{(t-2)^{n+1}}{3^{n+2}(1+t)}\,dt\right| \leq \max\{1, (1+x)^{-1}\}\frac{|x-2|^{n+2}}{3^{n+2}(n+2)} \to 0,$$

garante a convergência da série para a função $\ln x$ no intervalo $I =]-1, 5]$ (usando também o Teorema de Abel para o extremo $x = 5$).

Exemplo 7 (A função arcotangente)**.** Sabemos que $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = 1/(1+x^2)$, e como

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2},$$

obtemos por integração

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2},$$

e o erro em módulo $|R_{2n+1}(x)| \leq \int_0^x t^{2n+2}\,dt \to 0$, se $n \to \infty$. Desta forma, para $|x| \leq 1$ (e aqui usamos também o Teorema de Abel para os pontos $x = \pm 1$)

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Em particular

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$$

Exemplo 8 (A função exponencial)**.** Se $f(x) = \exp x$, então $f'(x) = \exp x$ e, daí, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ e $R_n(x) = x^{n+1} \frac{\exp(\bar{x})}{(n+1)!}$, com $\bar{x}$ estritamente entre 0 e x.

Observe que $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} \frac{\exp|\bar{x}|}{(n+1)!}$ e, portanto, $|R_n(x)| \to 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo. Isso que dizer que o raio de convergência dessa série é infinito. Em particular, obtemos $e = \exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Como $|R_n(1)| = \frac{\exp(\bar{x})}{n!}$, para algum $\bar{x} \in]0,1[$ e como $\exp x$ é crescente e $e < 3$, temos $|R_n(1)| < 3/(n+1)!$. Para obtermos o número $e = 2.718281828\ldots$ com, digamos, um erro menor que 10^{-5}, basta tomarmos a soma $\sum_{n=0}^{8} 1/n! = 2.718278769\ldots$

Exemplo 9 (As funções seno e cosseno)**.** Dado que $\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x$, $\frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x$, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$, as séries do seno e do cosseno satisfazem $|R_n(x)| \leq x^{n+1}/(n+1)!$. Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \text{ e } \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Exemplo 10 (Função C^∞ mas não analítica)**.** Seja $f(x) = \exp(x^{-2})$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esta é uma função de classe C^∞ em todo $\mathbb{R}$ (para verificar isso, calcule $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, e se $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = g(x) \exp(x^{-2})$, sendo $g(x) = P(x)/x^k$, uma função racional e, portanto $f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(0+h) - f^{(n)}(0)}{h} = 0$). Sua série de Taylor é a sequência constante igual a zero, que certamente não converge para f, a não ser no ponto $x = 0$.

---

4. Operações com séries de Taylor

As fórmulas

$$\frac{d^n}{dx^n}(f+g) = \frac{d^n}{dx^n} f + \frac{d^n}{dx^n} g, \text{ e } \frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}.$$

justificam a definição abaixo.

Calculamos esta última em x_0 e dividimos por $n!$, para obter o coeficiente c_n do termo x^n da série de Taylor de fg:

$$c_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n(fg)}{dx^n}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)\frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}g}{dx^{n-k}}(x_0),$$

ou seja, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Definição 2 (Soma e produto)**.** Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ as séries de Taylor de $f(x)$ e $g(x)$ em torno de x_0. Então a série de Taylor de $(f+g)$ é $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, e a de (fg) é $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})(x-x_0)^n$.

Exemplo 11 (Seno e cosseno hiperbólicos)**.** Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \text{ e } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Exemplo 12. Para $|x| < 1$, temos

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k+1}\right) x^{2k+1}$$

O próximo resultado fornece um meio interessante de construir novas séries a partir de séries conhecidas.

Teorema 4 (Substituição)**.** Suponha que a série de Taylor de $f(x)$ em torno de 0 seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (no intervalo de convergência I), e sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. Então a série de Taylor de $g(x) = f(\lambda x)$ é $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^n a_n)x^n$ (no intervalo λI), e a de $h(x) = f(x^m)$ é $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn}$ (no intervalo $J = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[m]{x} \in I\}$, se m for ímpar, ou $J = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[m]{|x|} \in I\}$ se m for par).

Demonstração. No caso de $g(x) = f(\lambda x)$, basta notar que $g^{(n)}(x) = \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$.

Para o caso de $h(x) = f(x^m)$, observemos que se x^m pertencer ao intervalo de convergência da série de Taylor de f, então $h(x) = f(x^m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^m)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn}$. □

Exemplo 13. Para $x \in \mathbb{R}$, $\exp(5x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k x^{3k}}{k!}$.

5. Derivação e Integração

Derivada e integral de uma função correspondem à derivada e à integral, termo a termo de sua série de Taylor. As demonstrações desses resultados encontram-se no Apêndice B, página 32.

Teorema 5. Suponha que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, com raio de convergência $R = \rho > 0$, ou $R = \infty$, então $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$, e $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+1}/(n+1)$, ambas com o mesmo raio de convergência R. Os intervalos de convergência podem mudar.

Exemplo 14. Seja $f(x) = (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; seu raio de convergência é $R = 1$, seu intervalo de convergência é $I =]-1, 1[$.

Sua derivada $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ tem raio de convergência $R = 1$ e intervalo de convergência o mesmo I.

Já sua primitiva $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1)$ tem mesmo raio de convergência, mas seu intervalo de convergência é $[-1, 1[$.

Exemplo 15 (A função arcotangente novamente)**.** Como $\int_0^x (1+t^2)^{-1}\,dt = \operatorname{arctg} x$, temos para $|x| \leq 1$ a série

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

6. Exemplos Diversos

Exemplo 16 (Relações de recorrência)**.** Se o termo geral a_n da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ satisfizer uma relação de recorrência linear da forma $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_j = 0$, a soma da série será uma função racional. Para determiná-la, fazemos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j x^{k-j} f(x) = \lambda_0 a_0 + (\lambda_1 a_0 + \lambda_0 a_1)x + \cdots + (\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j a_{k-j-1})x^{k-1}$. Daí,

$$f(x) = \frac{\lambda_0 a_0 + (\lambda_1 a_0 + \lambda_0 a_1)x + \cdots + (\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j a_{k-j-1})x^{k-1}}{\sum_{j=0}^{k} \lambda_j x^{k-j}}$$

Exemplo 17 (Sequência de Fibonacci)**.** A sequência recorrente de Fibonacci define-se por $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... O exemplo anterior implica

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 \cdots = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Seu raio de convergência é determinado por

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_n + F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{F_n}{F_{n-1}}} = \frac{1}{1+R},$$

ou seja, $R^2 + R - 1 = 0$. Como $|a_n| > 0$, a solução procurada é $R = (-1+\sqrt{5})/2$.

Exemplo 18 (Sequência de Fibonacci-continuaç ao)**.** Usamos a série

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 \cdots = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

para obtermos uma fórmula fechada para os elementos da sequência de Fibonacci.

As raízes de $1 - x - x^2$ são $(-1 \pm \sqrt{5})/2 = \phi^{-1}, -\phi$, em que $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ é o chamado número áureo. Aquele polinômio fatora-se $1 - x - x^2 = -(x + \phi)(x - \phi^{-1})$ e

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\phi}{1 - \phi x} - \frac{(-\phi^{-1})}{1 - (-\phi^{-1})x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

com

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

A unicidade das séries de Taylor implica que $b_n = F_n$.

Exemplo 19 (Equações diferenciais lineares)**.** Uma equação diferencial linear da forma $y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)$, com coeficientes $a_j(x)$ e função $b(x)$ analíticas em um intervalo comum I centrado no ponto x_0, admite soluções analíticas da forma $y(x) = y_P(x) + \sum_{k=1}^{m} C_k y_k(x)$, em que $y_P(x)$ é uma solução particular (da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, e $y_1, \ldots y_m$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada $y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$). Para obter essas soluções, escreve-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

e substitui-se na equação diferencial. Assim, obtêm-se relações de recorrência nos coeficientes e as séries correspondentes são determinadas.

Resolvamos a equação $y'' - 2y' + y = 1 + x$. Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$, temos $a_0 - 2a_1 + 2a_2 = 1$, $a_1 - 4a_2 + 6a_3 = 1$ e, para $n \geq 2$, $a_n - 2(n+1)a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$. Assim obtemos uma solução particular $y_P(x) = 3 + x$ e duas soluções $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ e $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/n! = xe^x$ da equação homogênea associada. A solução geral da equação é $y(x) = 3 + x + C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Exemplo 20 (Equações de segunda ordem com singularidades regulares)**.** Tais equações são da forma $(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)b(x)y' + c(x)y = 0$, com funções $b(x)$ e $c(x)$ analíticas em torno de x_0. Pelo menos uma das soluções é analítica em torno de x_0 e pode ser determinada como indicado no exemplo anterior.

Exemplo 21 (Funções de Bessel)**.** As funções de Bessel resolvem as equações $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, $p \in \mathbb{R}$. Uma solução analítica é

$$J_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+p}}{2^{2k+p} k!(p+1)(p+2)\dots(p+k)},$$

com raio de convergência $R = \infty$ e $\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} t^p e^{-t}\,dt$ (esta constante aparece por convenção).

Exemplo 22 (Séries hipergeométricas)**.** Definimos o *símbolo de Pochhammer* $(a)_0 = 1$ e $(a)_{n+1} = (a)_n(a+n) = a(a+1)\dots(a+n)$. As séries hipergeométricas são

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!},$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$, c não inteiro negativo. Sa a ou b for inteiro negativo, ela é um polinômio. Nos outros casos, ela tem raio de convergência 1 e é uma solução da equação diferencial hipergeométrica

$$x(1 - x)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0.$$

Algumas funções conhecidas são casos particulares de séries hipergemométricas, como por exemplo, $\ln(1 + x) = x[{}_2F_1(1, 1; 2; -x)]$, $(1 + x)^a = {}_2F_1(a, 1; 1; x)$ e $\operatorname{arcsen} x = x[{}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2)]$.

Exemplo 23 (A série binomial)**.** Seja $f(x) = (1+x)^p$, para algum $p \in \mathbb{R}$ fixo. Se $p \in \mathbb{N}$, então $f(x)$ será um polinômio. Consideremos os casos em que $p \notin \mathbb{N}$. Como $f'(x) = p(1+x)^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)(1+x)^{p-n}$, etc, obtemos a série binomial

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

em que definimos

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}$$

Essa série converge se $|x| < 1$. Para garantir que converge nesse intervalo para a função f que lhe deu origem, denotemos por $f_p(x)$ a soma da série e mostremos que $f_p(x) = f(x)$, se $|x| < 1$. Para isso, deixamos como exercício as seguintes verificações simples

$$(n+1)\binom{p}{n+1} = p\binom{p-1}{n}, \text{ e } \binom{p-1}{n} + \binom{p-1}{n-1} = \binom{p}{n}$$

Com isso em mãos, façamos algumas contas.

$$f_p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{p}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{p}{n+1} x^n = p\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^n = pf_{p-1}(x),$$

$$(1+x)f_{p-1}(x) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{p-1}{n} + \binom{p-1}{n-1}\right] x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = f_p(x)$$

Para finalizar a argumentação, consideremos a função $g(x) = f_p(x)/f(x) = f_p(x)(1+x)^{-p}$ e calculemos sua derivada.

$$g'(x) = f_p'(x)(1+x)^{-p} - pf_p(x)(1+x)^{-p-1} =$$

$$= pf_{p-1}(x)(1+x)^{-p} - p(1+x)f_{p-1}(x)(1+x)^{-p-1} = 0,$$

ou seja, $g(x) = A$, uma constante, e $A = 1$, pois $g(0) = 1$. Portanto, $f_p(x) = (1+x)^p$.

Exemplo 24 (A função arcosseno)**.** Sabemos que $\int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,dt = \operatorname{arcsen} x$. Daí, para $|x| \le 1$ (usamos a Fórmula de Stirling, Teorema 16, pág. 35, para verificar a convergência para $|x| = 1$), obtemos a série

$$\operatorname{arcsen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

A expressão

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!} = (-1)^n \frac{1.3.5.7\dots(2n-1)}{2^n n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}$$

permite-nos reescrever a série acima na forma

$$\operatorname{arcsen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$$

Exemplo 25 (Números de Bernoulli)**.** Consideremos a série

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Os coeficientes B_n são chamados de números de Bernoulli. Multiplicamos essa série pela de $e^x - 1$, e comparamos com a função x, para obtermos $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$. A função

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}\left[\frac{2}{e^x - 1} + 1\right] = \frac{x}{2}\left[\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}\right] = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

é uma função par e, assim, os coeficientes de índice ímpar B_{2n+1} se anulam, para $n \ge 1$.

Multiplicamos as séries de $x/(e^x - 1)$ e $(e^x - 1)$, comparamos com o resultado x, e obtemos a seguinte fórmula recursiva para os B_n.

$$\sum_{\substack{j+k=n,\\ j>0}} \frac{1}{j!} \frac{B_k}{k!} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0,\ n \ge 2.$$

Exemplo 26. Veremos mais adiante que vale a fórmula

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k},$$

o que implica que

$$\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}| \to 1$$

quando $k \to \infty$. Assim, podemos calcular o raio de convergência da série

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

pelo critério da razão, com o termo geral

$$a_k = \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \text{ se } k \geq 1.$$

Assim,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{B_{2k+2}}{B_{2k}}\right| \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{1}{4\pi^2} \times \frac{2^{2k+1\pi^{2k+2}|B_{2k+2}|}}{(2k+2)!} \times \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}|B_{2k}|} \times |x|^2$$

que tende a $|x|^2/(4\pi^2)$, se $k \to \infty$. A série convergirá absolutamente se $|a_{k+1}/a_k| < 1$, ou seja, se $|x| < 2\pi$, e divergirá se essa razão for maior que 1. Daí, o raio de convergência procurado é 2π.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} > 1$, temos que se substituirmos x por $\pm 2\pi$, o termo geral será em módulo

$$\frac{|B_{2k}|}{(2k)!} 2^{2k} \pi^{2k} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} > 2.$$

Portanto, pelo critério do termo geral (ele não tende a zero), a série não converge nos extremos do intervalo de convergência, ou seja, a série diverge se $|x| \geq 2\pi$.

Exemplo 27 (Polinômios de Bernoulli)**.** Consideremos a série, com um parâmetro t,

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n.$$

Observe que se $t = 0$, obtemos o número de Bernoulli $B_n(0) = B_n$. Vamos obter algumas propriedades das funções $B_n(t)$.

Primeiramente, mostremos que cada $P_n(t)$ é um polinômio, começando com $B_0(t) = 1$, constante. A série acima é o produto das séries de Taylor de e^{tx} com a do exemplo anterior, $x/(e^x - 1)$, ou seja,

$$B_n(t) = n! \sum_{i+j=n} \frac{B_i}{i!} \frac{t^j}{j!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} t^k,$$

que é um polinômio de grau n, chamado de **polinômio de Bernoulli de grau $\boldsymbol{n}$**; o coeficiente de t^n é $\binom{n}{n} B_0 = 1$.

Trocamos t por $(1 - t)$ em $xe^{tx}/(e^x - 1)$ e obtemos

$$\frac{xe^{(1-t)x}}{e^x - 1} = e^x \frac{xe^{(-x)t}}{e^x - 1} = \frac{(-x)e^{(-x)t}}{e^{-x} - 1},$$

ou seja, com as séries de Taylor,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-t) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n(t) \frac{x^n}{n!},$$

donde segue que $B_n(1 - t) = (-1)^n B_n(t)$.

Derivamos em relação à variável t e obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} \right] = x \left[\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} \right],$$

e derivamos a série de Taylor em relação a t. Para isso, consideramos que $|t| \leq 1$ e x esteja no interior do intervalo de convergência da série, para podermos derivá-la termo a termo. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n'(t) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n B_{n-1}(t) \frac{x^n}{n!},$$

do que tiramos $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$, para todo $n \geq 1$.

Agora, integramos em relação a t, com $0 \leq t \leq 1$, e $x \neq 0$ (o caso em que $x = 0$ é imediato, pois o integrando reduz-se a 1).

$$\int_0^1 \frac{xe^{tx}}{e^x - 1} dt = \left[\frac{e^{tx}}{e^x - 1} \right]_0^1 = 1,$$

e isso implica que se $n \geq 1$,

$$\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0.$$

Exemplo 28 (As Séries Harmônicas de Graus Pares)**.** O exemplo acima contém material suficiente para mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, vale a fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k},$$

onde B_{2k} é o $(2k)$-ésimo número de Bernoulli.

Existem diversas demonstrações desse resultado, mas apresentamos aquela contida no artigo [4].

Consideremos as integrais

$$I(k,m) = \int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}(0)] \cos(m\pi t)\, dt$$

com $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$ e $m \geq 1$. Observe que $I(0,m) = 0$, para todo $m \geq 1$. Integramos por partes e usamos as propriedades dos polinômios de Bernoulli.

$$\int_0^1 [B_{2k}(t) - B_{2k}(0)] \cos(m\pi t)\, dt = \frac{1}{m\pi} \big[(B_{2k}(t) - B_{2k}(0)) \operatorname{sen}(m\pi t)\big]_{t=0}^{t=1}$$

$$- \frac{2k}{m\pi} \int_0^1 B_{2k-1}(t) \operatorname{sen}(m\pi t)\, dt = \cdots = -\frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2} \int_0^1 B_{2k-2} \cos(m\pi t)\, dt =$$

$$= -\frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2} I(k-1, m),$$

pois se $m \geq 1$, $\int_0^1 B_{2k-2}(0) \cos(m\pi t)\, dt = 0$. Como

$$I(1,m) = \int_0^1 (t^2 - t) \cos(m\pi t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{se } m \text{ for ímpar;} \\ \dfrac{2}{m^2\pi^2}, & \text{se } m \text{ for par,} \end{cases}$$

por indução, mostramos que

$$I(k,m) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \text{ for ímpar;} \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{m^{2k}\pi^{2k}}, & \text{se } m \text{ for par.} \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2k}} = \sum_{m=1}^{\infty} I(k, 2m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} [I(k,2m) + I(k, 2m-1)] = \sum_{m=1}^{\infty} I(k,m).$$

Esta última série esconde uma série telescópica, embora não seja aparente isso. Vejamos o por quê. Observe que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(mx) = \frac{\operatorname{sen}[(m+1/2)x] - \operatorname{sen}[(m-1/2)x]}{2},$$

donde obtemos que

$$\cos(m\pi t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2m+1}{2}t\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2m-1}{2}t\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}$$

Daí, as somas parciais dessa série

$$\sum_{m=1}^{M} I(k,m) = \sum_{m=1}^{M}\int_0^1 [B_k(t) - B_k(0)]\cos(m\pi t)\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\left(\int_0^1 [B_k(t) - B_k(0)]\,\frac{\operatorname{sen}((2m+1)\pi t/2)}{2\operatorname{sen}(\pi t/2)}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 [B_k(t) - B_k(0)]\,\frac{\operatorname{sen}((2m-1)\pi t/2)}{2\operatorname{sen}(\pi t/2)}\,dt\right) =$$

$$= \int_0^1 [B_k(t) - B_k(0)]\,\frac{\operatorname{sen}((2M+1)\pi t/2)}{2\operatorname{sen}(\pi t/2)}\,dt - \int_0^1 \frac{B_k(t) - B_k(0)}{2}dt$$

A segunda integral é simples e depende de propriedades dos polinômios de Bernoulli vistas acima.

$$\int_0^1 \frac{B_k(t) - B_k(0)}{2}dt = -\frac{B_k(0)}{2}$$

Desenvolvemos a primeira integral por partes e obtemos

$$\int_0^1 [B_k(t) - B_k(0)]\,\frac{\operatorname{sen}((2M+1)\pi t/2)}{2\operatorname{sen}(\pi t/2)}\,dt = \int_0^1 f(t)\operatorname{sen}((2M+1)\pi t/2)\,dt =$$

$$= -f(1)\frac{\cos((2M+1)\pi)}{(2M+1)\pi} + \frac{f(0)}{(2M+1)\pi} + \int_0^1 f'(t)\frac{\cos((2M+1)\pi t)}{(2M+1)\pi}dt \to 0$$

se $M \to \infty$, pois a função $f(t) = [B_k(t) - B_k(0)]/\operatorname{sen}(\pi t/2)$ admite extensão contínua e derivável em todo o intervalo fechado $[0,1]$, ou seja, ela e sua derivada serão limitadas nesse intervalo, e o integrando da integral da direita é uma função limitada dividida por $(2M+1)\pi$.

Com isso fica fácil chegar à fórmula desejada.

Ainda não se conhece uma "fórmula fechada" para as somas das séries harmônicas de graus ímpares de 3 em diante.

Os números de Bernoulli aparecem em diversas expansões em séries.

Exemplo 29 (As funções tangente e cotangente)**.** Do exemplo anterior, temos para $|x| < 2\pi$ (use o Teorema 17, pág. 37, para obter o raio de convergência)

$$\frac{x}{2}\left[\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

donde obtemos (pela substituição de x por ix, $i = \sqrt{-1}$)

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

Da fórmula $2\operatorname{cotg}(2x) = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)/(\operatorname{sen} x \cos x) = \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$, obtemos para $|x| < \pi/2$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1}$$

Exemplo 30 (As funções secante e cossecante)**.** Com a fórmula $\operatorname{cossec} x = \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg}(x/2)$ e o exemplo anterior, obtemos para $|x| < \pi$

$$x \operatorname{cossec} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

Para a secante fazemos, como no caso dos números de Bernoulli, para $|x| < \pi/2$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{E_{2k}}{(2k)!}x^{2k},$$

com $E_0 = 1$, e para $n > 0$,

$$E_{2n} + \binom{2n}{2}E_{2n-2} + \binom{2n}{4}E_{2n-4} + \cdots + E_0 = 0.$$

Os números E_{2n} são chamados de **números de Euler** e são obtidas com o produto desta série e a do cosseno e igualando à série $1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \ldots$.

Exemplo 31 (Tangente e secante hiperbólicas)**.** Uma argumentação semelhante às de $\sec x$ e $\operatorname{tg} x$ produz para $|x| < \pi/2$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \text{ e } \operatorname{tgh} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$$

Exemplo 32 (Cotangente e cossecante hiperbólicas)**.** Uma argumentação semelhante às de $\operatorname{cossec} x$ e $\operatorname{cotg} x$ produz para $|x| < \pi$

$$x \operatorname{cossech} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-2^{2n})B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \text{ e } x \operatorname{cotgh} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

Exemplo 33 (Cosseno de $\sqrt{|x|}$)**.** Esse é um exemplo um tanto estranho, porque $\sqrt{|x|}$ não é derivável em $x = 0$. Sua reta tangente tende a ficar vertical nesse ponto.

No entanto, se $x > 0$, temos

$$\cos \sqrt{|x|} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!}$$

que é uma série cujo intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. Observe que para $x < 0$ ela também define uma função

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{|x|})^{2k}}{(2k)!} = \cosh \sqrt{|x|}.$$

A *mistura dessas duas funções* seria melhor entendida olhando para a função complexa definida pela série.

Exemplo 34 (Potências do arcosseno)**.** Para obtermos fórmulas para as diversas potências da função arcosseno (veja [3]), vamos estudar uma função auxiliar $g(x) = \exp(a \operatorname{arcsen} x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a) x^n/(n!)$. As fórmulas para os coeficientes $c_n(a)$ são obtidas com o cálculo da segunda derivada de g (em relação à variável x).

$$\frac{dg}{dx} = a \frac{\exp(a \operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = a^2 \frac{\exp(a \operatorname{arcsen} x)}{1-x^2} - ax \frac{\exp(a \operatorname{arcsen} x)}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1-x^2}\left(a^2 g(x) - x\frac{dg}{dx}\right),$$

ou seja, $(1-x^2)g''(x) = a^2 g(x) - xg'(x)$.

Substituímos as séries e obtemos

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a^2 c_n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \frac{x^n}{n!},$$

ou $c_0 = g(0) = 1$, $c_1 = g'(0) = a$ e, para $n \geq 2$, $c_{n+2} = (a^2 + (n+1)^2)c_n$, donde segue que para $k \geq 1$,

$\boxed{c_{2n}(a) = \prod_{k=1}^{n}(a^2 + (2k-2)^2)}$, e $\boxed{c_{2n+1}(a) = a\prod_{k=1}^{n}(a^2 + (2k-1)^2)}$.

Por outro lado, $\exp(a \operatorname{arcsen} x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \operatorname{arcsen}^n x/(n!)$. Consideramos essa como uma série de potências em a e comparamos os coeficientes dos a^n, obtendo as fórmulas

$$\operatorname{arcsen}^2 x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} x^{2n}}{\binom{2n}{n} n^2},$$

e para $N > 1$

$$\frac{\operatorname{arcsen}^{2N} x}{(2N)!} = \frac{1}{4}\sum_{k=N}^{\infty}\left(\sum_{1\leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{N-1} \leq k-1} \frac{1}{(2n_1)^2 \ldots (2n_{N-1})^2}\right)\frac{x^{2k}}{\binom{2k}{k}k^2},$$

e para todo $N \geq 1$

$$\frac{\operatorname{arcsen}^{2N+1} x}{(2N+1)!} = \sum_{k=N}^{\infty}\left(\sum_{0\leq n_1 < n_2 < \cdots < n_N \leq k-1} \frac{1}{(2n_1+1)^2 \ldots (2n_N+1)^2}\right)\frac{\binom{2k}{k}x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}$$

Exemplo 35 (Arcotangente ao quadrado)**.** Integração termo a termo da série do exemplo 12, página 9, produz para $|x| \leq 1$ a série

$$\operatorname{arctg}^2 x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right)\frac{x^{2k}}{2k}$$

Exemplo 36 (Arcotangente ao cubo)**.** Multiplicamos a série de $\operatorname{arctg}^2 x$ pela de $(1+x^2)^{-1}$ e obtemos

$$3\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} = 6\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(k + \frac{k-1}{3} + \frac{k-2}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right)\frac{x^{2k}}{2k}$$

Agora, usamos a integração

$$\operatorname{arctg}^3 x = 6\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(k + \frac{k-1}{3} + \frac{k-2}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right)\frac{x^{2k+1}}{(2k)(2k+1)},$$

---

7. Séries de Potências com Variáveis Complexas

Ao invés de usarmos apenas variáveis reais, podemos usar variáveis complexas $z = x + y\sqrt{-1}$ e escrevemos $i = \sqrt{-1}$ para facilitar a notação. As noções de convergência absoluta e condicionada são os mesmos. Observe que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$. O módulo do número complexo $z = x + iy$ é $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A teoria de funções (analíticas) complexas é bem extensa e não cabe aqui desenvolvê-la. Focamos apenas em questões mais práticas de cálculo de séries e aplicações.

Citamos aqui apenas alguns resultados teóricos de importância para o nosso tema, que podem ser encontrados nos 4 primeiros capítulos do livro [2]. No que segue, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto aberto (não vazio); $D(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$; $\overline{D}(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$, com $\rho > 0$.

i.

Exemplo 37 (A Série Geométrica)**.** A série geométrica converge absolutamente se $|z| < 1$ e diverge se $|z| \geq 1$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Vamos substituir x por $z = x + iy$ na série de Taylor de $\ln(1 - x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n}$$

Exemplo 38 (A Função Exponencial)**.** Vamos começar com a série da exponencial real, que é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Trocando x pelo número complexo $x + iy$, temos

$$\exp(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k} = \exp x \times \exp(iy).$$

Expandimos $\exp(iy)$ em série e separamos os termos de potências pares dos de potências ímpares, e usamos $i^{2k} = (-1)^k$

$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Com isso, vemos que $e^{z+2iN\pi} = e^z$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e todo $N \in \mathbb{Z}$, e a famosa fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Exemplo 39 (Forma Polar dos Números Complexos)**.** Como todo número complexo z de módulo 1, $|z| = 1$, está na circunferência de centro 0 e raio 1, podemos escrevê-lo como $z = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = e^{i\theta}$, podemos representar todo número complexo $z = x + iy \neq 0$ da forma

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|e^{i\theta},$$

para algum $\theta \in \mathbb{R}$ (que não é único, pois $\cos(\theta+2N\pi) = \cos\theta$, e $\operatorname{sen}(\theta+2N\pi) = \operatorname{sen}\theta$, para todo $N \in \mathbb{Z}$). A representação de $z = re^{i\theta}$ de um número complexo z é chamada de *forma polar* de z. Isso será importante ao definirmos a função logaritmo complexo.

Exemplo 40 (As Funções Trigonométricas)**.** Já sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, as séries de taylor de $\operatorname{sen} x$ e de $\cos x$ convergem,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Vimos acima que $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x[\cos y + i \operatorname{sen} y]$, para todo $z \in \mathbb{C}$, com $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Assim, temos que

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \ \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Com isso, podemos definir as funções $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$, para todo $z \in \mathbb{C}$ por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

que estendem as funções trigonométricas reais já conhecidas. Suas séries de Taylor são convergentes, para quaisquer $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Olhemos para essas séries nos pontos da forma $z = iy$, com $y \in \mathbb{R}$

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y,$$

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i \operatorname{senh} y$$

ou seja, obtemos o cosseno hiperbólico e i vezes o seno hiperbólico de y, respectivamente.

Exemplo 41 (A Função Logarítmica)**.** Vimos que podemos representar todo número complexo $z \neq 0$ em sua forma polar, $z = re^{i\theta}$. O número $r > 0$ é único, mas θ não é único, pois $e^{i(\theta + 2N\pi)} = e^{i\theta}$, mas podemos escolher um representante no intervalo $-\pi < \theta < \pi$, e podemos escrever $z = e^{\ln|z| + i\theta}$, e chamamos $\arg(z) = \theta$ (naquele intervalo).

Daí, uma primeira tentativa de definição da função $\ln z$ seria escrever $z = |z|e^{i\theta}$ e definir $\ln z = \ln|z| + i \arg(z)$.

Se usarmos como domínio da função $\arg z$ como $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), essa função não será contínua, pois uma volta no sentido antihorário em torno de 0 aumenta $\arg z$ de 2π. Por convenção, chamamos de *ramo principal* de $\arg z$ a função de domínio $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$ (tiramos dos complexos os números reais menores ou iguais a zero) e valores $-\pi < \arg z < \pi$. Em outras aplicações, podemos tirar dos complexos qualquer semirreta de origem 0 e escolhemos os valores apropriados de $\arg z$ nesse domínio.

A série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ da função $\ln(1 - z)$ é

$$lnz = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

que converge absolutamente se $|z| < 1$ e condicionalmente se $|z| = 1$ e $z \neq 1$.

Em particular, se $0 < \theta < 2\pi$, temos que se $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$,

$$\ln(1 - e^{i\theta}) = \ln|1 - e^{i\theta}| + i \arg(1 - e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\theta) + i\frac{\pi + \theta}{2}$$

Como $(2-2\cos\theta) = 4\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$ e $(1/2)\ln t = \ln\sqrt{t}$, obtemos a série

$$\ln\left(2\,\mathrm{sen}(\theta/2)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} \qquad (\dagger)$$

para $0 < \theta < 2\pi$.

---

8. Cálculos Diversos com Séries e Integrais

Exemplo 42. Calcular a integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Primeiramente, usamos a série de Taylor de $\ln(1+x^2)$,

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

que converge uniformemente no intervalo $-1 \le x \le 1$, pois é uma série alternada e, para qualquer $x \in [-1,1]$,

$$\left|\ln(1+x^2) - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\right| < \frac{x^{2N+2}}{N+1} \le \frac{1}{N+1}$$

Daí, temos que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{n\sqrt{1-x^2}}dx$$

Observe que, com a substituição $x = \mathrm{sen}\,\theta$, $dx = \cos\theta\,d\theta$, e $\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$, se $0 \le \theta \le \pi/2$, temos

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2n}\theta\,d\theta = \frac{(2n-1)\ldots 5.3.1}{2^n n!}\frac{\pi}{2} = (-1)^n\binom{-1/2}{n}\frac{\pi}{2}$$

usando integração por partes.

Daí, temos

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{-1/2}{n}$$

Observe a série binomial

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}t^n = 1 + t\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n}t^{n-1}$$

Sem o primeiro termo da série, obtemos a integral

$$\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{n} = \left[2\ln\left(1+\sqrt{1+t}\right)\right]_0^1 = 2\ln(1+\sqrt{2})-2\ln 2$$

Por fim, obtemos

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi\left[\ln(1+\sqrt{2}) - \ln 2\right].$$

Exemplo 43. Calcule a integral

$$\int_0^{2\pi} x\ln\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)\,dx$$

Usamos aqui a série

$$\ln\left(2\,\mathrm{sen}(\theta/2)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} \tag{†}$$

do Exemplo 41, na página 25. A troca de ordem da somatória com a integral é legítima, pois a série (†) converge uniformemente em cada intervalo da forma $0+\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$, para todo $\delta > 0$.

$$\int_0^{2\pi} x\ln\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} x\frac{\cos(nx)}{n}\,dx =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left[x\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\right]_0^{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}(nx)\,dx = 0.$$

Exemplo 44. Calcule a integral

$$\int_0^{\pi/2} x\ln\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)\,dx$$

Usamos novamente a série

$$\ln\left(2\,\mathrm{sen}(\theta/2)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} \qquad (\dagger)$$

Procedemos como no exemplo anterior e integramos por partes

$$\int_0^{\pi/2} x\ln\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2} x\frac{\cos(nx)}{n}\,dx =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left[x\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(nx)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[-x\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2} - \frac{\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} + \frac{35}{32}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$

onde usamos que $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\cos((2p+1)\pi/2) = 0$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)^3} = -\frac{1}{8}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{2}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\right] = -\frac{3}{32}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} = -\frac{3}{32}\zeta(3)$$

Exemplo 45. Calcule a integral

$$\int_0^{\pi/3} x\ln^2\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)\,dx$$

Vamos usar a série

$$\ln\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$$

e trocar a ordem das somatórias com a integral.

$$\int_0^{\pi/3} x\ln^2\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)\,dx = \sum_{m,n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/3} x\frac{\cos(mx)\cos(nx)}{mn} =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/3}\left[x\frac{\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)}{2mn}\right]\,dx \qquad (*)$$

Lembramos que, por integração por partes, se $k \neq 0$, então

$$\int x\cos(kx)\,dx = x\frac{sen(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

e, daí,

$$\int_0^{\pi/3} x\frac{\cos((m+n)x)}{mn} = \frac{\pi}{3mn}\frac{\operatorname{sen}((m+n)\pi/3)}{(m+n)} + \frac{\cos((m+n)\pi/3)-1}{(m+n)^2}$$

Assim,

$$\int_0^{\pi/3} x\ln^2\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\,dx = \frac{17}{6480}\pi^4.$$

Exemplo 46. Calcule a integral

$$\int_0^{2\pi} x^2\ln^2\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\,dx$$

Exemplo 47. Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$$

Aqui usaremos o seguinte encaminhamento, tirado da referência [6]. Lembramos que

$$2\operatorname{arcsen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}$$

e, portanto,

$$\int_0^t \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2t)^{2n}}{n^3\binom{2n}{n}}$$

$$\int_0^{1/2}\left(\int_0^t \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{x}\,dx\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$$

Vamos calcular essa integral, e começamos com uma mudança na ordem de integração e integramos por partes

$$\int_0^{1/2}\left(\int_0^t \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{x}\,dx\right)\frac{dt}{t} = \int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{x}\left(\int_x^{1/2}\frac{dt}{t}\right)dx =$$

$$= \int_0^{1/2}\ln(2x)\frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{x}\,dx = \left[-\frac{\ln^2(2x)}{2}\operatorname{arcsen}^2 x\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2}\ln^2(2x)\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

O termo entre colchetes resulta em zero. Fazemos uma mudança de variáveis na integral remanescente, $x = \operatorname{sen}(t/2)$, $dx = \cos(t/2)\,dt/2 = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,dt/2$ nesse intervalo de integração, e obtemos

$$\int_0^{1/2} \ln^2(2x)\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} t\ln^2\left(2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)\,dt = \frac{17}{25920}\pi^4,$$

onde a segunda integral foi calculada em um exemplo anterior. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}} = \frac{17}{3240}\pi^4 = \frac{17}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Apêndice A. Teoremas de Convergência Uniforme e de Abel

Séries de potência convergentes em um intervalo têm um comportamento muito bom em termos das operações que podemos fazer.

Primeiramente apresentamos um critério útil de convergência de sequências numéricas.

Teorema 6 (Critério de Cauchy)**.** A sequência numérica $n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$ é convergente se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que se $n_0 \le m < n$, então $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Demonstração. Se $a_n \to L \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que para todo $n \ge n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon/2$. Portanto, se $n_0 \le m < n$, $|a_m - a_n| = |a_m - L + L - a_n| \le |a_m - L| + |a_n - L| < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponhamos que dado $\varepsilon > 0$, exista n_0, tal que $n_0 \le m < n$ implique $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Vamos mostrar que essa sequência converge. Primeiramente observe que a sequência a_n é limitada (justifique esta afirmação).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $b_n = \inf\{a_k : k \ge n\}$ e $c_n = \sup\{a_k : k \ge n\}$.

Dessa forma obtivemos as sequências b_n crescente e c_n decrescente, tais que $b_n \le a_n \le c_n$. Daí, existem os limites $b_n \to L_b$ e $c_n \to L_c$. Mostremos que $L_b = L_c$ e, portanto $a_n \to L_b$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja n_0 tal que para todo $n \ge n_0$, $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$ (condição da hipótese), $|L_b - b_n| < \varepsilon$ e $|c_n - L_c| < \varepsilon$ (dos limites). As definições de supremo e ínfimo implicam $|b_n - c_n| \le |b_n - a_{n_0}| + |a_{n_0} - c_n| \le 2\varepsilon$, para todo $n \ge n_0$. Além disso, $|L_b - L_c| \le |L_b - b_n| + |b_n - c_n| + |c_n - L_c| \le 4\varepsilon$. A igualdade $L_b = L_c$ decorre desta última. □

Definição 3 (Convergência uniforme)**.** Dizemos que a sequência de funções $S_n(x)$ **converge uniformemente** para a função $S(x)$ no intervalo $[a,b]$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 (independente da variável x), tal que para todo $x \in [a,b]$ e todo $n \geq n_0$, $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Teorema 7 (Convergência Uniforme)**.** Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para algum $x_0 \neq 0$, então ela converge absolutamente no intervalo $|x| < |x_0|$ e uniformemente em cada intervalo $|x| \leq |x_1|$, se $0 < |x_1| < |x_0|$.

Demonstração. Dado que a série converge se $x = x_0$, temos que o termo geral $a_n x_0^n \to 0$, se $n \to \infty$. Disso podemos concluir que existe n_0, tal que para todo $n > n_0$, $|a_n x_0^n| < 1$, ou seja, $|a_n| < 1/|x_0|^n$.

Portanto, se $|x| < |x_0|$, $|a_n x^n| < |x|^n/|x_0|^n$. Pelo critério da comparação, a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge, pois a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n/|x_0|^n$ converge (razão menor que 1).

Para demonstrarmos a convergência uniforme, usaremos o critério de Cauchy. Seja x_1, tal que $0 < |x_1| < |x_0|$. Dado $\varepsilon > 0$, seja n_0, tal que para todo $n \geq n_0$, tenhamos $|a_n| < 1/|x_0|^n$ e

$$\left| \frac{1}{1 - |x_1/x_0|} - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{|x_1|^k}{|x_0|^k} \right| = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_1|^k}{|x_0|^k} < \varepsilon.$$

Se $n > m \geq n_0$, obtemos para $|x| \leq |x_1|$, $|\sum_{k=m}^{n} a_n x^n| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_n|\,|x|^n \leq \sum_{k=m}^{n} |a_n|\,|x_1|^n \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_1|^k}{|x_0|^k} < \varepsilon$. Como n_0 não depende de x, a convergência é uniforme. $\square$

Teorema 8. Se a sequência de funções contínuas $S_n(x)$ convergirem uniformemente no intervalo $[a,b]$ para a função $S(x)$, então a função S será contínua em $[a,b]$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja n_0, tal que se $n \geq n_0$, $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [a,b]$. A função S_{n_0} é contínua em $[a,b]$, ou seja, dado $x_0 \in [a,b]$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta$ implica $|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$. Portanto, para todo $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta$, vale $|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < 3\varepsilon$, o que prova a continuidade de $S(x)$ em $[a,b]$. $\square$

Em particular, toda série de Taylor converge uniformemente em qualquer intervalo fechado contido no interior de seu intervalo de convergência. O tratamento das extremidades do intervalo de convergência é dado pelos dois teoremas abaixo, de Abel.

Teorema 9 (Convergência Uniforme de Abel)**.** Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ tenha raio de convergência $R > 0$ finito e que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ seja convergente. Então, para cada $x_1 \in]x_0 - R, x_0 + R[$, a série converge uniformemente no intervalo $[x_1, x_0 + R]$.

Demonstração. Para facilitar a exposição, suporemos que $x_0 = 0$, $R = 1$ e $x_1 = 0$ (os outros casos decorrem facilmente desse).

Sejam $R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_n x^n$ e $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_n$. Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que para todo $n \geq n_0$, $|R_n(x)| < \varepsilon$, independente de $x \in [0, 1]$.

Observe que $a_n = R_n - R_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos reescrever $R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(R_k - R_{k+1})x^k = \sum_{k=n}^{\infty} R_k x^k - \sum_{k=n}^{\infty} R_{k+1}x^k = R_n x^n + x^n(1 - x)\sum_{k=0}^{\infty} R_{n+k+1}x^k = x^n[R_n + (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} R_{n+k+1}x^k]$.

Como $\sum_{k=0}^{\infty} R_k$ é convergente, $R_k \to 0$ se $k \to \infty$ e, portanto, existe n_0, tal que $|R_n| < \varepsilon/2$, para todo $n \geq n_0$. Daí, se $0 \leq x < 1$ e $n \geq n_0$,

$$|R_n(x)| < |R_n| + (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} |R_{n+k+1}|x^k \leq \frac{\varepsilon}{2} + (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2}x^k = \varepsilon,$$

e de $|R_n(1)| = |R_n| < \varepsilon/2$, se $n \geq n_0$, obtivemos a convergência uniforme desejada. □

Teorema 10 (Teorema do Limite de Abel)**.** Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ tenha raio de convergência $R > 0$ finito e que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ seja convergente. Então

$$\lim_{x \to (x_0+R)^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Demonstração. Como a convergência no intervalo $[x_0, x_0 + R]$ é uniforme, a função $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é contínua nesse intervalo. Em particular, é contínua no ponto $x_0 + R$. □

Teorema 11 (Um Critério de Convergência Uniforme)**.** Sejam $a_n(x)$ e $b_n(x)$, $n \geq 0$, duas sequências de funções contínuas e definimos a sequência $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n(x)$. Suponha que a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)[b_{n+1}(x) - b_n(x)]$ seja uniformemente convergente (em um conjunto J), e que exista $\lim_{n\to\infty} A_n(x)b_n(x)$. Então a série abaixo converge uniformemente em J e sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)[b_{n+1}(x) - b_n(x)] + \lim_{n\to\infty} A_n(x)b_n(x)$$

Demonstração. Observe que $a_0(x) = A_0(x)$ e, se $n > 0$, $a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$. Daí, se $N > 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} [A_n - A_{n-1}] b_n = \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N$$

□

Apêndice B. Teoremas da Integração e Derivação

A convergência uniforme das séries de Taylor em intervalos da forma $[a, b]$, com $a < b$, possibilita *trocar a ordem dos limites.* Isso não acontece com qualquer sequência, como vemos no exemplo a seguir. (Lembre-se que integral é um limite.)

Exemplo 48. A sequência $n \mapsto S_n(x) = nx \exp(-nx^2)$ converge para 0, seja qual for o valor de $x \in \mathbb{R}$. Note que

$$\int_0^1 S_n(x)\, dx = \int_0^1 xn \exp(-nx^2)\, dx = -\frac{1}{2} \left[\exp(-nx^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}),$$

donde segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

No entanto,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\, dx$$

Isto ocorre neste caso porque a convergência de $S_n(x)$ não é uniforme. Note que $S_n'(x) = 0$ tem solução $x = 1/\sqrt{2n} \in [0, 1]$, se $n > 0$, e $S_n(1/\sqrt{2n}) = \sqrt{n/(2e)}$, que não é sequência limitada (tende a ∞). Portanto, não pode ficar arbitrariamente próxima de 0, *para todo* $x \in [0, 1]$. (Veja [7, Exercício 37, págs. 318-319].)

Isso já não ocorre com a sequência $n \mapsto P_n(x)$ (a série de Taylor de uma função). Vejamos como a convergência uniforme aplica-se no caso das séries de Taylor.

Teorema 12 (Integral de Série de Taylor)**.** Suponha que a sequência de funções contínuas $S_n(x)$ convirja uniformemente no intervalo $[a, b]$ para a função $S(x)$ (que é necessariamente contínua). Então $\int_a^b S_n(x)\,dx \to \int_a^b S(x)\,dx$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja n_0, tal que para todo $n \geq n_0$ e todo $x \in [a, b]$, $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. Disso obtemos

$$\left|\int_a^b S_n(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)|\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a),$$

para todo $n \geq n_0$, terminando a demonstração. □

Teorema 13 (Derivada de Série de Taylor)**.** Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ convergir para a função f no intervalo I, então f é derivável para todo x no interior do intervalo I, $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$. Em particular, f é de classe C^{∞} no interior de I.

Demonstração. A série $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$ converge no interior de I para uma função contínua $g(x)$. Aplicamos o Teorema da Integração de Séries de Taylor, para x no interior de I,

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x) - f(x_0).$$

donde segue que $g(x) = f'(x)$. □

Uma consequência importante desse resultado é a unicidade da série de Taylor.

Teorema 14 (Unicidade da Série de Taylor)**.** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiver raio de convergência não nulo e se no intervalo de convergência $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, então $a_0 = f(x_0)$ e para todo $n > 0$, $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Apêndice C. Fórmulas de Wallis e de Stirling

A sequência $a_n = n!$ tem uma representação assintótica $b_n = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, no sentido que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. Sua demonstração depende em parte da chamada fórmula de Wallis,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2.4.6.8\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Apresentamos as demonstrações destes resultados seguindo [8, Exercícios 19.40 e 27.19, págs. 390-1 e 567-8].

Teorema 15 (Fórmula de Wallis)**.** A sequência $a_n = \prod_{k=1}^n (2k)^2/[(2k-1)(2k+1)]$ converge para $\pi/2$.

Demonstração. Consideremos as integrais $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t\,dt$. Temos $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$ e, para $n > 1$, integramos por partes para obtermos as fórmulas de recorrência

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t\,dt = \Big[-\cos t \operatorname{sen}^{n-1} t \Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \operatorname{sen}^{n-2} t\,dt =$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2 t)\operatorname{sen}^{n-2} t\,dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

donde obtemos $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Isso produz $I_{2n} = (\pi/2)\prod_{k=1}^n (2k-1)/(2k)$ e $I_{2n+1} = \prod_{k=1}^n (2k)/(2k+1)$. Daí segue que se $n > 0$

$$\frac{\pi}{2} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{(2k-1)} \frac{2k}{(2k+1)} \right) \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$$

A sequência $b_n = I_{2n}/I_{2n+1}$ convergirá a 1, pois no intervalo $[0,\pi/2]$ valem as desigualdades $\operatorname{sen}^{2n+1} x \le \operatorname{sen}^{2n} x \le \operatorname{sen}^{2n-1} x$, e daí, $I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1} = (2n+1)I_{2n+1}/(2n)$. Portanto $1 \le b_n \le 1 + 1/(2n) \to 1$, se $n \to \infty$.

Isso termina a demonstração. □

Exemplo 49 (Variantes da fórmula de Wallis)**.** Tomando a raiz quadrada da sequência do teorema temos

$$\sqrt{a_n} = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e, multiplicando por $\sqrt{(2n+1)/n}$, temos

$$\sqrt{\frac{(2n+1)a_n}{n}} = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{n}} \to \sqrt{\pi}$$

Observe que

$$\frac{2.4.6\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n-1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}.$$

A dedução da Fórmula de Stirling depende de um caso particular do método geral chamado de *Fórmula da Soma de Euler-Maclaurin* (veja [8, Exercício 27.18, págs. 566-7]).

Teorema 16 (Fórmula de Stirling)**.** Para todo $n > 0$ vale

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp(-n) < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n \exp(-n + 1/(12n))$$

e, portanto

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1.}$$

Demonstração. Seja $P(x) = x^2 - x + 1/6$ e, para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $\psi(x) = P(x+1-n)$, se $n \le x < n+1$. Para $n > 2$, calculemos a integral

$$\int_1^n \frac{\psi(t)}{2t^2}\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{P(t+1-k)}{2t^2}\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2 - (t-k) + \frac{1}{6}}{2t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{12n} + (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(\log(k+1) - \log k) \; =$$

$$= \; -\frac{11}{12} - \frac{1}{12n} + n - (n-1)\log n - \log(n-1)! - \frac{\log n}{2} = -\frac{11}{12} - \log\left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}}\right)$$

A integral $\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{2t^2}\, dt$ converge para um número β, pois $|\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{2t^2}\, dt| \le \frac{1}{12n}$. (O numerador do integrando $|\psi(t)| \le \frac{1}{6}$.) Daí,

$$\log\left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}}\right) = \frac{11}{12} + \beta - \int_n^\infty \frac{\psi(t)}{2t^2}\, dt.$$

Seja $\alpha = e^{\beta + \frac{11}{12}}$. A fórmula acima escreve-se

$$\log\left(\frac{n!}{\alpha\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}}\right) = -\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{2t^2}\, dt.$$

Como $\log(1 + \frac{1}{k}) < 1/k$, se $k > 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2 - (t-k) + \frac{1}{6}}{2t^2}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{k}{k+1} + \frac{1}{12(k^2+k)} - \frac{k}{2}\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \; >$$

$$> \frac{k}{k+1} + \frac{1}{12(k^2+k)} > 0.$$

Assim,

$$-\frac{1}{12n} < \log\left(\frac{n!}{\alpha\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}}\right) < 0,$$

ou $\alpha\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} < n! < \alpha\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}$.

Agora só falta determinar α, usando a fórmula de Wallis. Seja $f(n) = \alpha\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$. As desigualdades acima implicam que $n!/f(n) \to 1$, se $n \to \infty$. Daí, $(n!)^2 f(2n)/[(2n)! f(n)^2] \to 1$, ou seja

$$\frac{\alpha (n!)^2 (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{\alpha^2 (2n)! n^{2n+1} e^{-2n}} = \frac{1}{\alpha} \frac{(n!)^2 2^{2n} \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}} \to \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} = 1,$$

ou seja, $\alpha = \sqrt{2\pi}$. □

Exemplo 50. Vamos determinar o intervalo de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$.

O raio de convergência é

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1}.$$

Para testar a convergência nos pontos $x = \pm e^{-1}$, usamos a Fórmula de Stirling e o Teste da comparação no limite.

Para $x = e$, o termo geral é assintótico a

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} n^{1/2}}.$$

Daí, comparando no limite com a série harmônica de grau 1/2, $b_n = n^{-1/2}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} n^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

o que implica que a série diverge se $x = e$.

Para $x = -e$, o termo geral em valor absoluto decresce (pois $|a_{n+1}/a_n| = (1+\frac{1}{n})^n e^{-1} < 1$) e tende a zero (pois é assintótico a $n^{-1/2}$) e, portanto, a série é alternada, que é (condicionalmente) convergente.

Assim, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$ é $I = [-e^{-1}, e^{-1}[$.

O último resultado serve para calcular o intervalo de convergência de séries que envolvem os números de Euler e de Bernoulli.

Teorema 17 (Fórmulas assintóticas para números de Bernoulli e Euler)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!}|E_{2n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}|B_{2n}| = 1$$

Demonstração. Decorrem das fórmulas [1, 23.2.16 e 23.2.22, pág. 807] ou também [5, Fórmulas 136 e 140, págs. 237-240], mas veja o Exemplo 28, na página 17 acima.

$$\frac{(\pi/2)^{2n+1}}{2\,(2n)!}|E_{2n}| = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}; \quad \frac{(2\pi)^{2n}}{2\,(2n)!}|B_{2n}| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

$\square$

Referências

[1] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun (eds), *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, Washington, DC, EUA, 10ª impressão, 1972.

[2] Geraldo Ávila. *Variáveis Complexas e Aplicações*, 3ª ed., LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2003.

[3] Jonathan Borwein e M. Chamberland, Integer Powers of Arcsin, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2007.

[4] Óscar Ciaurri, Luis M. Navas, Francisco J. Ruiz, Juan L. Varona. A simple computation of $\zeta(2k)$. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 122 No. 5 (2017), 444–451.

[5] Konrad Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Dover Publications Inc., Nova Iorque, EUA, 1990.

[6] Alfred van der Poorten. Some Wonderful Formulae: An Introductionn to Polylogarithms. Macquarie Mathematics Reports No. 79-0008, 1979 (Macquarie University, North Ryde, N.S.W. 2113 Australia).

[7] Murray R. Spiegel, *Cálculo Avançado*, McGraw-Hill do Brasil, Ltda., 1978.

[8] Michael Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, EUA,1994.