

SÉRIES DE FOURIER

RICARDO BIANCONI

RESUMO. Apresentamos os resultados básicos da Teoria das Séries de Fourier, com vários exemplos, e com interpretação física. Os teoremas são demonstrados em apêndices. Tópicos especiais contêm soluções das equações da onda e do calor, o fenômeno de Gibbs, somas de séries harmônicas, produtos infinitos e uma fórmula para a função Γ .

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| 1. Introdução | 2 |
| 2. Séries de Fourier. Convergência | 2 |
| 3. Séries de senos e séries de cossenos | 5 |
| 4. Derivação e integração | 9 |
| 5. Identidade de Parseval | 10 |
| Apêndice A. Tópicos Especiais | 11 |
| A.1. Equações da onda e do calor | 11 |
| A.2. O fenômeno de Gibbs | 13 |
| A.3. Somas de séries harmônicas | 15 |
| A.4. Alguns Produtos Infinitos | 16 |
| A.5. Uma Fórmula para a função Γ | 17 |
| A.6. Uma Função Contínua não Derivável | 19 |
| Apêndice B. Demonstrações dos Teoremas | 22 |
| B.1. Teoremas de convergência | 22 |
| B.2. Integração e derivação | 24 |

| | |
|-----------------------------|----|
| B.3. Teorema de Fejér | 25 |
| B.4. Identidade de Parseval | 29 |
| Referências | 33 |

1. INTRODUÇÃO

O problema de representar funções por séries trigonométricas

$$c_0 + \sum_{n \geq 1} \left[c_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + d_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]$$

já tinha sido tratado no século XVIII por Leonhard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), que buscavam resolver a equação da onda em uma corda vibrante. No século seguinte, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fez contribuições importantes na solução da equação do calor. Em 1807 apresentou suas primeiras ideias de representação de funções por séries trigonométricas no trabalho *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, présenté le 21 Décembre 1807 à l'Institut National, Nouveau Bulletin des sciences par la Société philomatique de Paris*. I. Paris: Bernard, março de 1808. pág. 112–116. Sua teoria foi mais extensamente exposta no livro *Théorie Analytique de la Chaleur* de 1822. Sua preocupação era resolver a equação do calor representando suas soluções como funções não necessariamente contínuas, por soma de séries trigonométricas. Essa ideia deu origem à Análise Harmônica, ramo da matemática que evoluiu bastante até os dias de hoje.

Veja as soluções dessas equações no Apêndice A.1, página 11.

Neste texto apresentamos uma introdução ao assunto. Os resultados citados no texto são demonstrados nos apêndices.

2. SÉRIES DE FOURIER. CONVERGÊNCIA

As séries de Fourier servem para representar diversos tipos de funções.

Definição 1. Uma função 2π -periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **C^k por partes** se existirem números t_0, \dots, t_n , $-\pi \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq \pi$, tais que f é de classe C^k em cada intervalo $]t_i, t_{i+1}[$ e para cada j , $0 \leq j \leq k$ existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow t_i^+} f^{(j)}(x)$ e $\lim_{x \rightarrow t_{i+1}^-} f^{(j)}(x)$.

O conjunto das funções C^k por partes formam um espaço vetorial real com a forma bilinear

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt,$$

que é quase um produto interno: valem $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, $\langle af_1 + bf_2, g \rangle = a\langle f_1, g \rangle + b\langle f_2, g \rangle$, $\langle f, f \rangle \geq 0$, mas existem funções não nulas f de classe C^k por partes satisfazendo $\langle f, f \rangle = 0$. Isso não é um grande problema, pois essas funções são nulas a menos de uma quantidade finita de pontos em cada intervalo $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi]$.

Exemplo 1 (Conjunto ortonormal). Usamos as identidades trigonométricas $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$, $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$, $2 \cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$ e $2 \sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$ para calcular

$$\begin{aligned} \langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle &= 0, \\ \langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \neq 0 \\ 2 & \text{se } m = n = 0 \end{cases} \\ \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{se } m = n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 2 (Períodos distintos de 2π). No caso mais geral em que as funções consideradas tenham período $2L > 0$, o produto escalar apropriado é $\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t)g(t) dt$ e um conjunto ortonormal é $\cos(n\pi x/L)$ e $\sin(n\pi x/L)$, e a função constante $1/\sqrt{2}$.

A série de Fourier de uma função f de classe C^k por partes é

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

cujos coeficientes são $a_0 = \langle f(x), 1 \rangle$ (observe que $1 = \cos(0x)$), e para $n \geq 1$, $a_n = \langle f(x), \cos(n\pi x/L) \rangle$ e $b_n = \langle f(x), \sin(n\pi x/L) \rangle$.

Exemplo 3 (Funções pares e ímpares). Se f for função $2L$ -periódica par ($f(-x) = f(x)$), então os coeficiente b_n , $n \geq 1$, serão todos nulos. Se f for função $2L$ -periódica ímpar ($f(-x) = -f(x)$), então os coeficiente a_n , $n \geq 0$, serão todos nulos. Isso facilita bastante as contas.

O resultado principal de convergência desta seção é o teorema abaixo, cuja demonstração encontra-se no Apêndice A.1, Teorema 7, página 24.

Teorema 1 (Convergência pontual). Se f for função $2L$ -periódica e de classe C^1 por partes em $[-L, L]$, então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

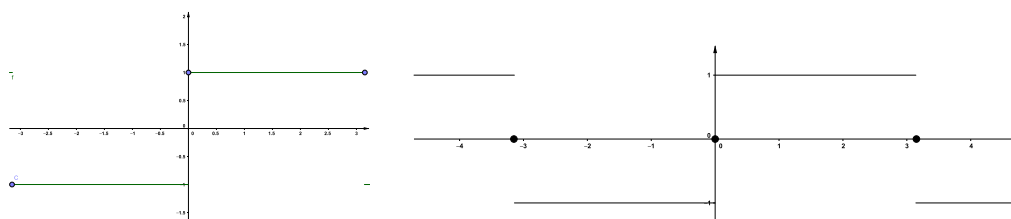
ou seja, a série de Fourier de f convergirá para $f(x)$ nos pontos em que ela for contínua e para a média dos limites laterais de f nos pontos de descontinuidade.

Observação 1. Uma interpretação geométrica: A sequência de somas parciais $S_N(x)$ que definem a série de Fourier de f é a sequência das projeções ortogonais de f sobre os subespaços gerados por $B_N = \{1; \cos(n\pi x/L); \sin(n\pi x/L) : 1 \leq n \leq N\}$, ou seja, cada $S_N(x)$ é a **melhor aproximação** de f por polinômios trigonométricos, *na geometria do espaço de funções*. A geometria de um espaço vetorial é codificada em seu produto escalar, que permite calcular distâncias e ângulos. Observe que a geometria de cada subespaço de dimensão finita é a geometria usual de \mathbb{R}^n .

Observação 2. Uma interpretação física: Se a função f representar a amplitude de uma grandeza física (voltagem ou corrente de sinal elétrico, temperatura ou quantidade de calor de uma barra, amplitude de oscilação de uma corda vibrante, etc), então a **potência** do sinal é proporcional ao quadrado da amplitude, f^2 . A norma ao quadrado de uma função, $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = (1/L) \int_{-L}^L f^2(t) dt$, representa a **energia** do sinal no intervalo $[-L, L]$. A série de Fourier permite decompor o sinal em cada frequência e $S_N(x)$ é o polinômio trigonométrico que *captura* toda a energia do sinal contida nas frequências indicadas nos termos em cossenos e senos. Mais adiante, vemos que a *Identidade de Parseval* admite o mesmo tipo de interpretação física.

Nos exemplos a seguir, o cálculo dos coeficientes de Fourier, e da soma da série, ficam como exercício.

Exemplo 4. $f(x) = 1$ se $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = -1$ se $-\pi \leq x < 0$; é função ímpar; $a_n = 0$, $n \geq 0$; $b_{2k} = 0$ e $b_{2k+1} = 4/[(2k+1)\pi]$. Veja os gráficos de $f(x)$ e de $S(x)$ na Figura 1.

FIGURA 1. Gráfico de $f(x)$ à esquerda e de $S(x)$ à direita.

Exemplo 5. $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$; $a_n = 0$, $n \geq 0$; $b_n = (-1)^{n-1}2/n$, $n \geq 1$.

Exemplo 6. $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$; $b_n = 0$, $n \geq 1$; $a_0 = \pi$; $a_{2k+1} = -4/[\pi(2k+1)^2]$, $k \geq 0$; $a_{2k} = 0$, $k \geq 1$.

Exemplo 7. $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$; $a_0 = \sinh(a\pi)/(a\pi)$; se $n \geq 1$,

$$a_n = (-1)^n \frac{2a \sinh(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}; \quad b_n = -(-1)^n \frac{2n \sinh(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}$$

3. SÉRIES DE SENOS E SÉRIES DE COSSENOS

Em alguns problemas é interessante simplificar a representação em séries de Fourier. Um caso importante é a representação por uma série de Fourier que contenha apenas termos em senos, ou apenas termos em cossenos. A função a ser representada é definida em um intervalo da forma $[0, L]$, $L > 0$. Para obtermos uma representação que envolva somente termos em cossenos, estendemos f ao intervalo $[-L, L]$ de modo que seja uma *função par*. Caso desejemos uma série envolvendo somente termos em senos, estendemos f de modo que seja uma função ímpar (aqui não importa o seu valor em $x = 0$, pois não afeta o cálculo das integrais pertinentes).

Vejamos alguns exemplos. Para simplificar, usamos $L = \pi$.

Observação 3. Se b_n , $n \geq 1$, forem os coeficientes da série de Fourier de senos de $f(x)$, então $(-1)^n b_n$, $n \geq 1$ serão os coeficientes da série de Fourier de senos de $g(x) = f(\pi - x)$.

Se a_n , $n \geq 0$ forem os coeficientes da série de Fourier de cossenos de $f(x)$, então $(-1)^n b_n$, $n \geq 1$ serão os coeficientes da série de Fourier de cossenos de $g(x) = f(\pi - x)$.

Ambas as afirmações decorrem de uma simples mudança de variáveis nas integrais que definem os coeficientes, e ficam como exercício. Observe que se $g(x) = f(\pi - x)$, então $f(x) = g(\pi - x)$.

Exemplos de Séries de Fourier de Senos.

Exemplo 8.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}((2k+1)x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < \pi \\ -1, & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0; \pm\pi \end{cases}$$

Exemplo 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) = \begin{cases} x, & \text{se } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Exemplo 10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{12}{n^3} \operatorname{sen}(nx) = x(\pi^2 - x^2), \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Exemplo 11. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n[1 - (-1)^n \cos(a\pi)]}{(a^2 - n^2)\pi} \operatorname{sen}(nx) = \begin{cases} \cos(ax), & \text{se } 0 < x < \pi \\ -\cos(ax), & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0; \pm\pi. \end{cases}$$

Exemplo 12. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n\pi \operatorname{sen}(a\pi)}{(n^2 - a^2)\pi} \operatorname{sen}(nx) = \begin{cases} \operatorname{sen}(ax), & \text{se } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Daqui em diante apresentamos apenas a expressão da função no intervalo $0 < x < \pi$, ficando como exercício as expressões das extensões a $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 13.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \operatorname{sen}((2k+1)x) = x(\pi - x), \quad 0 < x < \pi.$$

Exemplo 14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4[1 - (-1)^n]}{\pi n^3} \right] \operatorname{sen}(nx) = x^2, \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \text{sen}(nx) = x^3, \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + a^2)\pi} [1 - (-1)^n e^{a\pi}] \text{sen}(nx) = e^{ax}, \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \text{senh}(a\pi)}{(n^2 + a^2)\pi} \text{sen}(nx) = \text{senh}[a(\pi - x)] = \frac{e^{a(\pi-x)} - e^{-a(\pi-x)}}{2}, \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 18.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \text{sen}((2k+1)x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Exemplos de Séries de Fourier de Cossenos.

Exemplo 19.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{(2k+1)\pi} \cos(nx) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq \pi/2 \\ -1 & \text{se } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Exemplo 20.

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) = x^2, \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 21.

$$\frac{\pi^3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{6\pi}{n^2} - 12 \frac{[1 - (-1)^n]}{\pi n^4} \right] \cos(nx) = x^3, \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 22. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$\frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{(a^2 + n^2)\pi} \cos(nx) = e^{ax}, \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 23. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$\frac{\text{senh}(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a \text{senh}(a\pi)}{(a^2 + n^2)\pi} \cos(nx) = \cosh(ax), \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 24. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$\frac{\cosh(a\pi) - 1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a \frac{(-1)^n \cosh(a\pi) - 1}{(a^2 + n^2)\pi} \cos(nx) = \sinh(ax), \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 25. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$,

$$\frac{1 - \cos(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a \frac{(-1)^n \cos(a\pi) - 1}{(n^2 - a^2)\pi} \cos(nx) = \operatorname{sen}(ax), \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 26. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$,

$$\frac{\operatorname{sen}(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a(-1)^n \frac{\operatorname{sen}(a\pi)}{(a^2 - n^2)\pi} \cos(nx) = \cos(ax), \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 27. Estendamos a função $F(x) = x$, $0 < x < \pi$ de três maneiras seguintes: $f_1(x) = x$, $-\pi < x < \pi$; $f_2(x) = x$, $0 < x < 2\pi$; $f_3(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$. Depois, estendemos a todo \mathbb{R} de modo que fique 2π -periódica. Essas extensões produzem para todo x no intervalo $0 < x < \pi$

$$(1) \quad x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$$

$$(2) \quad x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$$

$$(3) \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$$

Exemplo 28. A extensão ímpar da função $\cos(Nx)$, $0 < x < \pi$, com $N \in \mathbb{Z}$, produz, para $0 < x < \pi$,

$$\cos(2Nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - (2N)^2} \operatorname{sen}[(2k+1)x],$$

$$\cos[(2N+1)x] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k)^2 - (2N+1)^2} \operatorname{sen}(2kx).$$

Exemplo 29 (Alteração da Fase). Um outro modo de obter séries só de senos ou só de cossenos é a alteração das fases do mesmo. Uma combinação linear $a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$, não identicamente nula, pode ser escrita

$$(a_n^2 + b_n^2) \left(\frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2} \operatorname{sen}(nx) \right).$$

Existem arcos θ_n e ϕ_n , tais que

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}.$$

Aplicamos as fórmulas trigonométricas de senos e cossenos de somas de arcos para obter

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \cos(nx - \theta_n) = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \sin(nx + \phi_n).$$

Se convencionarmos que $\phi_n = \theta_n = 0$ nos casos em que $a_n = b_n = 0$, poderemos escrever

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \cos(nx - \theta_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \sin(nx + \phi_n). \end{aligned}$$

4. DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

Nem sempre a derivada de uma série de Fourier será uma série de Fourier.

Exemplo 30. A série de Fourier de $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$ é

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

Sua derivada é

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx,$$

que não converge em nenhum $x \in \mathbb{R}$ (o termo geral não tende a zero) e nada tem a ver com a função constante igual a zero, que é a derivada de $f(x)$ no intervalo aberto $]-\pi, \pi[$.

No entanto, se a função que lhe deu origem for contínua em \mathbb{R} e de classe C^2 por partes em $[-\pi, \pi]$, a derivada da série de Fourier será a série de Fourier de sua derivada. Veja a demonstração no Apêndice B.2, Teorema 9, pág. 24.

Teorema 2 (Derivação). Se f for função contínua, 2π -periódica, cuja série de Fourier seja $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, e se f e sua derivada f' forem C^1 por partes em $[-\pi, \pi]$, então a série de Fourier de f' será $\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$, e para todo $x \in \mathbb{R}$, sua soma será $(f'(x^+) + f'(x^-))/2$.

A integração de uma série de Fourier será a série de uma primitiva da função que lhe deu origem. Veja a demonstração no Apêndice B.2, Teorema 10, pág. 25.

Teorema 3 (Integração). Se f for função 2π -periódica, contínua por partes em $[-\pi, \pi]$ e cuja série de Fourier seja $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, então a série de Fourier de $F(x) = \int_0^x f(t) dt - a_0 x/2$ será $A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx)$, $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\tau) d\tau$, e para todo $x \in \mathbb{R}$, sua soma será $F(x)$.

Exemplo 31. A função 2π -periódica $f(x)$, igual a x^2 se $-\pi \leq x \leq \pi$ é contínua em \mathbb{R} . Sua série de Fourier converge para $f(x)$ em todo \mathbb{R} , e se $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Podemos derivá-la, obtendo para $-\pi < x < \pi$,

$$x = -2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

A média aritmética de seus limites laterais em $x = n\pi$ é zero, que é a soma da série nesses pontos.

Também podemos integrá-la e obtemos, para $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x(\pi^2 - x^2) = -12 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$$

5. IDENTIDADE DE PARSEVAL

Essa identidade é dada pelo seguinte teorema, demonstrado no Apêndice B.4, Teorema 12, pág. 29.

Teorema 4 (Identidade de Parseval). Seja f uma função 2π -periódica e de classe C^1 por partes em $[-2\pi, \pi]$ e $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$ sua série de Fourier. Então

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \|f\|^2.$$

Observação 4. Uma **interpretação física** dela é a seguinte. Imagine que f descreva um fenômeno oscilatório (voltagem de um sinal elétrico, amplitude de uma vibração mecânica, etc). Em cada período de oscilação, a energia do sinal é dado por uma constante vezes a integral acima. A identidade de Parseval diz

como obter a contribuição de cada frequência que aparece na composição do sinal.

Podemos usar a identidade de Parseval para calcular somas de algumas séries numéricas.

Exemplo 32. Usamos a série de senos de $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$, e obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemplo 33. A série de senos de $f(x) = 1$, $0 < x < \pi$, produz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exemplo 34. A série de cossenos de $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$, produz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exemplo 35. A série de senos de $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$, $0 < x < \pi$ produz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

APÊNDICE A. TÓPICOS ESPECIAIS

A.1. Equações da onda e do calor.

Exemplo 36 (Equação da onda). Como dissemos na Introdução, a representação de funções por séries trigonométricas surgiram em meados do século XVIII com as tentativas de resolver o *Problema das Cordas Vibrantes*, que se reduzia a resolver a *Equação da Onda*.

Oscilações sem atenuação em cordas perfeitamente elásticas de comprimento L , sem força externa aplicada, são descritas por

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

em que ρ é a densidade linear de massa e τ é a força de tração aplicada à corda. As condições iniciais são $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t)$ e $u(L, t)$ fixos, e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$.

Em 1753, Daniel Bernoulli publicou uma solução na forma

$$u(x, t) = A_1 \operatorname{sen} x \cos(at) + A_2 \operatorname{sen}(2x) \cos(2at) + \dots$$

Vamos obter esse tipo de solução a seguir.

O método da separação de variáveis, $u(x, t) = f(x)g(t)$ é eficaz para resolver a equação, produzindo duas equações $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \omega^2 f = 0$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\tau}{\rho} \omega^2 g = 0$, para uma constante ω , que, devido à condição inicial $u(0, t)$ e $u(L, t)$ fixos, deve ser $\omega = \omega_n = 2n\pi/L$.

A solução geral será uma superposição de vários $f_n(x) = \alpha_n \cos(\omega_n x) + \beta_n \operatorname{sen}(\omega_n x)$ e $g_n(t) = \gamma_n \cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \delta_n t\right) + d_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \omega_n t\right)$.

As condições iniciais permitem calcular os coeficientes das funções f_n e g_n . Desenvolvemos em séries de Fourier

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n x) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n x)).$$

Vamos assumir que a corda esteja presa pelas extremidades nos pontos $(0, 0)$ e $(L, 0)$. Assim, a condição inicial torna-se $u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen}(\omega_n x)$. Também temos que a velocidade nos extremos será zero, por estar presa. Daí, $g(t)$ possuirá apenas termos e cossenos. Com isto, a solução será

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen}(\omega_n x) \cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \delta_n t\right).$$

Exemplo 37 (Equação do calor). A variação da temperatura $u(x, t)$ em uma barra linear homogênea de comprimento L e de largura e espessura muito pequenas em relação a L , sem fonte externa de calor, pode ser descrita pela equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que $k > 0$ é uma constante que depende da condutividade térmica, densidade e calor específico do material. O problema consiste em resolver a equação com uma condição inicial (distribuição de temperaturas) $u(x, 0) = u_0(x)$ e temperaturas nas extremidades fixas $u(0, t) = u_0$ e $u(L, t) = u_L$.

O método da *separação das variáveis* que provou ser eficiente na solução da equação. Escrevemos $u(x, t) = f(x)g(t)$ e substituímos na equação:

$$f(x)g'(t) = kf''(x)g(t).$$

Se f e g não se anularem (por exemplo, se $u(x, t)$ for a temperatura absoluta em graus Kelvin), podemos fazer

$$\frac{g'}{g}(t) = k \frac{f''}{f}(x).$$

A variação de x com t constante e a variação de t com x constante impõem a constância de g'/g e de f''/f , o que implica a existência de uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, para a qual $g'(t)/g(t) = \lambda$ e $f''(x)/f(x) = \lambda/k$. A primeira equação tem solução $g(t) = g(0)e^{\lambda t}$, que, para ser fisicamente possível, deve satisfazer $\lambda = -a^2 < 0$.

A segunda equação pode ser escrita como $f''(x) = -a^2 f(x)$. As funções $\text{sen}(ax)$ e $\text{cos}(ax)$ e, portanto, qualquer combinação linear delas, resolvem a equação. As condições iniciais $u(0, t) = u_0$ e $u(L, t) = u_L$ impõem nova condição sobre λ , a saber, $a = \sqrt{|\lambda|} = 2n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}$.

Por fim, a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ impõe uma *superposição* dos diversos termos $(a_n \cos(2n\pi x/kL) + b_n \text{sen}(2n\pi x/kL))e^{-2n\pi t/L}$.

A contribuição fundamental de Fourier na solução dessa equação foi mostrar a possibilidade de representar "qualquer" função como soma de uma série trigonométrica.

A condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ determina os coeficientes a_n e b_n e muitas funções admitem a representação $u_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi x/kL) + b_n \text{sen}(2n\pi x/kL))$. A solução da equação do calor é

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{kL}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{kL}\right)] \exp\left(-\frac{2n\pi t}{L}\right).$$

A.2. O fenômeno de Gibbs. Este é um fenômeno sobre séries de Fourier de funções de classe C^1 por partes com descontinuidades. Foi descoberto por Henry Wilbraham (1848) ("On a certain periodic function", *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. 3: pp. 198–201) e redescoberto por J. Willard Gibbs (1899) ("Fourier's Series", *Nature*, Vol. 59 (No. 1539): p. 606).

Considere o seguinte exemplo, a série de senos da função $f(x) = \pi/2$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \text{sen}[(2k+1)x] = \begin{cases} \pi/2, & \text{se } 0 < x < \pi; \\ -\pi/2, & \text{se } -\pi < x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

Sua soma parcial é

$$S_{2N+1}(x) = 2 \sum_{k=0}^N \frac{\text{sen}[(2k+1)x]}{2k+1},$$

cuja derivada é

$$S'_{2N+1}(x) = 2 \sum_{k=0}^N \cos[(2k+1)x] = \begin{cases} \frac{\text{sen}[(2N+2)x]}{\text{sen } x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 2N+2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

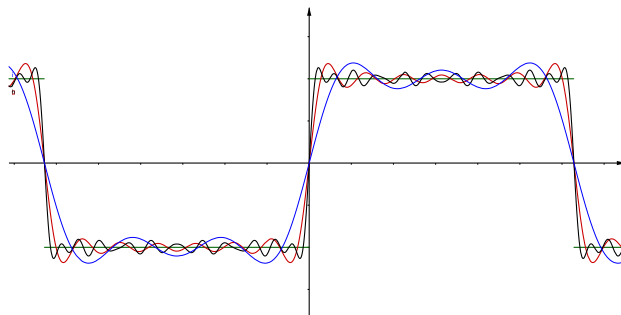


FIGURA 2. Fenômeno de Gibbs. Em verde, $f(x)$; em azul, $S_5(x)$; em vermelho, $S_{13}(x)$; em preto, $S_{29}(x)$.

Seus pontos de máximo e mínimo locais ($S'_{2N+1}(x) = 0$) no intervalo $]0, \pi[$ são $x = k\pi/(2N+2)$, $1 \leq k \leq 2N+1$. Se estudarmos o sinal de $S'_{2N+1}(x)$ neste intervalo, podemos observar que

- (1) os pontos de máximo locais ocorrem quando k é ímpar;
- (2) os de mínimos locais, quando k é par.

O ponto de máximo local mais próximo da origem e positivo é $x = \pi/(2N+2)$, e seu oposto, $x = -\pi/(2N+2)$ é o ponto de mínimo local mais próximo da origem.

Se particionarmos o intervalo $[0, \pi]$ em subintervalos de comprimento $\Delta x = \pi/(2N+2)$, então $S_{2N+1}(\pi/(2N+2))$ é igual a uma soma de Riemann da função $g(x) = \text{sen } x/x$. Fazendo $N \rightarrow \infty$, essas somas tenderão à integral $\int_0^\infty [\text{sen } x/x] dx$.

Fazemos integração numérica e obtemos que

$$\Omega = \int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx > 1,178 \frac{\pi}{2},$$

ou seja, quase 18% maior que $\pi/2$. Isto quer dizer que os gráficos das somas parciais $S_{2N+1}(x)$ (curvas em \mathbb{R}^2) tenderão ao conjunto composto pelos segmentos $y = \pi/2$, $0 < x < \pi$; $y = -\pi/2$, $-\pi < x < 0$; $x = 0, \pm\pi$, $-\Omega \leq y \leq \Omega$ (segmentos verticais).

Você pode usar este exemplo para estudar quaisquer outras funções de classe C^1 por partes, com descontinuidade, que pode ser deslocada para a origem, mediante uma mudança de variáveis do tipo $x \mapsto (x + a)$.

Isto pode ser um problema em semicondutores sensíveis a picos de voltagem.

A.3. Somas de séries harmônicas. A série de Fourier de $f(x) = \cos(\alpha x)$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$) converge para $f(x)$ em todo o intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$\cos(\alpha x) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx).$$

Substituimos $x = \pi$, lembrando que $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right),$$

ou

$$\pi \cotg(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

A convergência é uniforme (e absoluta) em α nos intervalos $|\alpha| \leq \beta < 1$.

Podemos expandir em séries de Taylor

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = -\frac{2\alpha}{n^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} \right) = -\frac{2\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{n^{2k}}.$$

A convergência uniforme e absoluta das séries envolvidas permitem rearranjar os termos para obtermos

$$\pi\alpha \cotg(\alpha\pi) = 1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} \right) \alpha^{2p}.$$

A série de Taylor

$$\frac{x}{2} \cotg \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

é convergente no intervalo $-2\pi < x < 2\pi$, onde B_{2n} são os números de Bernoulli, $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_{2n+1} = 0$ ($n \geq 1$), e

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad n \geq 2.$$

Substituimos x por $2\pi x$ e obtemos para $|x| < 1$

$$\pi x \cotg(\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2\pi)^{2n} x^{2n}.$$

A unicidade da série de Taylor de $\pi x \cotg(\pi x)$ implica a fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p-1} \frac{B_{2p} (2\pi)^{2p}}{2(2p)!}.$$

Assim, podemos calcular, por exemplo,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93\,555}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{20}} = \frac{174.611 \pi^{20}}{6.125.317.861.162.500}.$$

A.4. Alguns Produtos Infinitos.

Exemplo 38. Lembramos que a função 2π -periódica f , tal que $f(\theta) = \cos(a\theta)$ ($a \notin \mathbb{Z}$), $-\pi \leq \theta \leq \pi$ é contínua em todo \mathbb{R} e, portanto, sua série de Fourier converge uniformemente para $f(\theta)$ em $[\pi, \pi]$,

$$\cos(a\theta) = \frac{\sen(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a \sen(a\pi)}{\pi} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \cos(n\theta).$$

Em particular, fazendo $\theta = \pi$ e dividindo por $\sen(a\pi)/\pi$,

$$\pi \frac{\cos(a\pi)}{\sen(a\pi)} - \frac{1}{a} = \sum_{n \geq 1} \frac{2a}{a^2 - n^2}.$$

A série do lado direito, como função da variável a , converge uniformemente no intervalo $[-|x|, |x|]$, desde que $|x| < 1$, pois

$$\left| \frac{2a}{a^2 - n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2a}{1 - (a/n)^2} \right) < \frac{4a}{n^2},$$

se $n \geq |x|\sqrt{2}$.

O lado esquerdo da igualdade tende a zero se $a \rightarrow 0$, pela regra de L'Hospital. Podemos, então integrar ambos os lados, de 0 a x , e passar a integral para dentro da somatória da série (devido à convergência uniforme).

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \right) &= \int_0^x \left[\pi \frac{\cos(a\pi)}{\text{sen}(a\pi)} - \frac{1}{a} \right] da = \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_0^x \frac{2a}{a^2 - n^2} da = \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) = \ln \left[\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

Exemplo 39 (Produto de Wallis). Fazendo $x = 1/2$ no exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= \frac{\text{sen}(\pi/2)}{\pi/2} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \cdots = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \right) \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \right) \cdots = \frac{\prod_{k \geq 0} (2k+1)^2}{\prod_{k \geq 1} (2k)^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 40. Como $\cos x = \text{sen}(2x)/2 \text{sen}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\pi x) &= \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2 \text{sen}(\pi x)} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{4x^2}{n^2} \right) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^{-1} = \\ &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{4x^2}{n^2} \right) \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k)^2} \right)^{-1} = \prod_{k \geq 0} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Se $x = 1/4$, obtemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 14 \cdots}$$

A.5. Uma Fórmula para a função Γ . A função $\Gamma(x)$ é definida pela integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Esta integral converge; temos que $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(n+1) = n!$, se $n \in \mathbb{N}$.

Nosso objetivo é demonstrar a seguinte fórmula, que vale para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $0 < x < 1$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

Em particular, com $x = 1/2$, obtemos $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Lembramos que se $a \notin \mathbb{Z}$, e se $|\theta| \leq \pi$,

$$\cos(a\theta) = \frac{\operatorname{sen}(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a \operatorname{sen}(a\pi)}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos(n\theta).$$

Calculamos em $\theta = 0$ e obtemos

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)} = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1^2} + \frac{2a}{a^2 - 2^2} - \frac{2a}{a^2 - 3^2} + \dots$$

Se $0 < a < 1$, a seguinte integral imprópria converge,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_\delta^M \frac{x^{a-1}}{1+x} dx,$$

pois, se $0 < x < \delta$, $x^{a-1}/(1+x) < x^{a-1}$, e se $x > 1$, $x^{a-1}/(1+x) < x^{a-2}$. Agora separamos a integral como soma de duas integrais, nos intervalos $[0, 1]$ e $[1, \infty)$, e fazemos a mudança de variável $x = 1/y$, $dx = -1/y^2$ na segunda integral, e obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{y^{-a}}{1+y} dy = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1+x} dx \end{aligned}$$

Como o intervalo de integração é $[0, 1]$, podemos expandir em série de potências $(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n$ (série geométrica) e integrar termo a termo, e obtemos

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1+x} dx = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1^2} + \frac{2a}{a^2 - 2^2} - \frac{2a}{a^2 - 3^2} + \dots = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}.$$

Agora calculamos $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$, $0 < x < 1$.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \cdot \int_0^\infty t^{1-x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} u^{-x} e^{-u} dt du = \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty v^{2x-1} w^{1-2x} e^{-(v^2+w^2)} dt \quad \Leftarrow (t = v^2, u = w^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \cos^{2x-1}(\theta) \operatorname{sen}^{1-2x}(\theta) r e^{-r^2} d\theta dr \quad \Leftarrow (v = r \cos \theta, w = r \operatorname{sen} \theta) \\
&= 4 \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \operatorname{sen}^{1-2x}(\theta) d\theta = \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \operatorname{sen}^{1-2x}(\theta) d\theta = \\
&= \int_0^1 z^{x-1} (1-z)^{-x} dz \quad \Leftarrow (z = \operatorname{sen}^2 \theta, dz = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta) \\
&= \int_0^1 \frac{t^{x-1} - t^{-x}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} \quad \Leftarrow \left(t = \frac{z}{1-z}, z = \frac{t}{1+t} \right)
\end{aligned}$$

A.6. Uma Função Contínua não Derivável. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) publicou em 1872 um artigo¹ em que descreve uma família de séries trigonométricas que convergem para funções contínuas em todo \mathbb{R} , mas não são deriváveis em nenhum ponto de \mathbb{R} .

Sejam $b \in]0, 1[$ e α um número ímpar, tais que $\alpha b > 1$. Considere a série trigonométrica $\sum_{n \geq 0} b^n \cos(\alpha^n \pi x)$. Ela converge absolutamente e uniformemente para uma função 2-periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, necessariamente contínua (até uniformemente contínua). Em particular, a série é a série de Fourier de f .

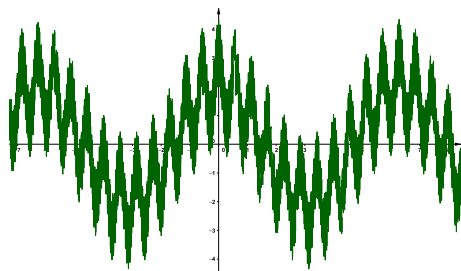


FIGURA 3. Soma $S_3(x)$ da série de Fourier da função de Weierstrass $\sum_{n \geq 0} (3/5)^n \cos(7^n \pi x)$, com $b = 3/5$ e $\alpha = 7$.

Se existisse o limite para $x \rightarrow x_0$ do quociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

¹Karl Weierstrass, “Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen,” in: *Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Mathematische Werke von Karl Weierstrass* (Berlim, Alemanha Mayer & Mueller, 1895), vol. 2, pages 71–74.

então f seria derivável em x_0 . Mostraremos que tal limite não existe.

Para tal, construímos duas sequências de pontos de \mathbb{R} , uma crescendo para x_0 e outra decrescendo para x_0 , de modo que esta fração fique ilimitada, o que demonstra a não existência de nenhum dos dois limites laterais.

Seja $x \neq x_0$, e seja $N \in \mathbb{N}$. Então existe $\alpha_N \in \mathbb{Z}$, tal que $x_{N+1} = \alpha^N x - \alpha_N \in (-1/2, 1/2]$ (α_N é o inteiro mais próximo de $\alpha^N x$).

Sejam

$$x' = x'_N = \frac{\alpha_N - 1}{\alpha^N}, \quad x'' = x''_N = \frac{\alpha_N + 1}{\alpha^N}.$$

Então temos que

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{N+1}}{\alpha^N}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{N+1}}{\alpha^N},$$

e $x' < x_0 < x''$. Podemos escolher N grande o suficiente de modo que x' e x'' estejam tão próximos de x_0 quanto se queira.

Substituímos a série em

$$\begin{aligned} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} &= \sum_{n \geq 1} b^n \frac{\cos(\alpha^n \pi x') - \cos(\alpha^n \pi x_0)}{x' - x_0} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha b)^n \frac{\cos(\alpha^n \pi x') - \cos(\alpha^n \pi x_0)}{x' - x_0} + \sum_{n \geq 0} b^{N+n} \frac{\cos(\alpha^{N+n} \pi x') - \cos(\alpha^{N+n} \pi x_0)}{x' - x_0}. \end{aligned}$$

As fórmulas dos cossenos da soma e da diferença de arcos produz

$$\frac{\cos(\alpha^n \pi x') - \cos(\alpha^n \pi x_0)}{\alpha^n (x' - x_0)} = -\pi \operatorname{sen} \left(\alpha^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) \frac{\operatorname{sen} \left(\alpha^n \frac{x' - x_0}{2} \pi \right)}{\alpha^n \frac{x' - x_0}{2} \pi},$$

e temos a desigualdade

$$\left| \frac{\operatorname{sen} \left(\alpha^n \frac{x' - x_0}{2} \pi \right)}{\alpha^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} \right| \leq 1$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha b)^n \frac{\cos(\alpha^n \pi x') - \cos(\alpha^n \pi x_0)}{\alpha^n (x' - x_0)} \right| \leq \\ &\leq \pi \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha b)^n = \frac{\pi}{\alpha b - 1} [(\alpha b)^N - 1] \leq \frac{\pi}{\alpha b - 1} (\alpha b)^N. \end{aligned}$$

Como α é um número ímpar, temos

$$\cos(\alpha^{N+n}\pi x') = \cos(\alpha^n(\alpha_N - 1)\pi) = -(-1)^{\alpha_N},$$

$$\cos(\alpha^{N+n}\pi x_0) = \cos(\alpha^n \alpha_N \pi + \alpha^n x_{N+1} \pi) = (-1)^{\alpha_N} \cos(\alpha^n x_{N+1} \pi),$$

e também vale a igualdade

$$\sum_{n \geq 0} b^{N+n} \frac{\cos(\alpha^{N+n}\pi x') - \cos(\alpha^{N+n}\pi x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_N} (\alpha b)^N \sum_{n \geq 0} \frac{1 + \cos(\alpha^n x_{N+1} \pi)}{1 + x_{N+1}} b^n.$$

Todos os termos da série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1 + \cos(\alpha^n x_{N+1} \pi)}{1 + x_{N+1}} b^n$$

são positivos; o primeiro $\cos(x_{N+1}\pi) \geq 0$, e $1 + x_{N+1} \in [1/2, 3/2]$. Portanto,

$$\frac{\cos(x_{N+1}\pi)}{1 + x_{N+1}} + (\dots) \geq \frac{2}{3}$$

Daí, temos que

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_N} (\alpha b)^N \eta \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{\alpha b - 1} \right),$$

onde $\eta > 1$ e $|\varepsilon| \leq 1$.

Analogamente,

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = (-1)^{\alpha_N} (\alpha b)^N \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{\alpha b - 1} \right),$$

onde $\eta_1 > 1$ e $|\varepsilon_1| \leq 1$.

Se escolhermos α e b , tais que $\alpha b > 1 + 2\pi/3$, então $\pi/(\alpha b - 1) < 2/3$, digamos $\pi/(\alpha b - 1) = 2/3 - \delta$, $\delta > 0$ (que não depende de N), e, portanto,

$$\left| \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \right| \geq (\alpha b)^N \delta, \quad \left| \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} \right| \geq (\alpha b)^N \delta,$$

ou seja, tendem a ∞ quando $N \rightarrow \infty$.

Portanto f não é derivável em x_0 .

APÊNDICE B. DEMONSTRAÇÕES DOS TEOREMAS

No que segue, $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ e, para $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, e $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ e, para todo $N \in \mathbb{N}$, $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Os limites laterais à direita e à esquerda são denotados $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x; t > x} f(t)$ e $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x; t < x} f(t)$, respectivamente.

B.1. Teoremas de convergência.

Lema 1. Para todo $N \in \mathbb{N}$ e todo $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Nt = \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})t}{2 \text{sen} \frac{t}{2}}.$$

Demonstração. Essa igualdade decorre da fórmula

$$\cos nt \text{sen} \frac{t}{2} = \frac{1}{2} [\text{sen}(n + \frac{1}{2})t - \text{sen}(n - \frac{1}{2})t].$$

A soma dessas expressões de $n = 1$ até $n = N$ produz

$$\begin{aligned} \left(\text{sen} \frac{t}{2}\right) \sum_{n=1}^N \cos nt &= \sum_{n=1}^N [\text{sen}(n + \frac{1}{2})t - \text{sen}(n - \frac{1}{2})t] = \\ &= \frac{1}{2} [\text{sen}(N + \frac{1}{2})t - \text{sen} \frac{t}{2}] \end{aligned}$$

A restrição em t implica $\text{sen} \frac{t}{2} \neq 0$, e a fórmula decorre da divisão de ambos os membros por esta função. \square

Lema 2. Para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})t}{2 \text{sen} \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})t}{2 \text{sen} \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

Demonstração. A função na integral é contínua e limitada nos intervalos indicados e, portanto, é integrável. O resultado decorre da integração das expressões da igualdade do lema anterior, porque as integrais dos cossenos naqueles intervalos são nulas. \square

Teorema 5 (Desigualdade de Bessel). Se f for função contínua por partes em $[-\pi, \pi]$, então para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx.$$

Em particular, a série $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge para um limite menor ou igual àquela integral.

Demonstração. Basta integrar $[f(x) - S_N(x)]^2 \geq 0$. □

Teorema 6 (Riemann). Se f for função contínua por partes em $[-\pi, \pi]$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

Demonstração. A desigualdade de Bessel implica a convergência da série $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$. Portanto seu termo geral $(a_n^2 + b_n^2)$ tende a zero. O resultado decorre das desigualdades $|a_n|, |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. □

Lema 3. Se f for função contínua por partes em $[-\pi, \pi]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right)x \, dx = 0.$$

Demonstração. O Teorema de Riemann aplicado a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)x}{2} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) \operatorname{sen} \frac{x}{2}] \cos nx + \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) \cos \frac{x}{2}] \operatorname{sen} nx \, dx$$

implica o resultado. □

Lema 4. Se f for função 2π -periódica e contínua por partes em $[-\pi, \pi]$, então para todo $N \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left[\frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right] dt.$$

Demonstração. Decorre do Lema 1 e da definição dos coeficientes de Fourier. □

Lema 5. Se f for função 2π -periódica e contínua por partes em $[-\pi, \pi]$, então para todo $N \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$

$$S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{f(t+x) - f(x^-)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right) \operatorname{sen} \left(N + \frac{1}{2}\right)t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+x) - f(x^+)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right) \operatorname{sen} \left(N + \frac{1}{2} \right) t dt$$

Demonstração. Decorre do lema anterior e do Lema 2. \square

Teorema 7 (Convergência pontual). Se f for função 2π -periódica e de classe C^1 por partes em $[-\pi, \pi]$, então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Demonstração. A função $[f(t+x) - f(x^+)]/2 \operatorname{sen}(t/2)$ é contínua por partes no intervalo $0 < t \leq \pi$. O limite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+x) - f(x^+)}{2 \operatorname{sen}(t/2)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+x) - f(x^+)}{t} \frac{t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+x) - f(x^+)}{t} \end{aligned}$$

existe porque f é de classe C^1 por partes. Assim, aquela função é contínua por partes no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$.

O mesmo tipo de argumento implica a função $[f(t+x) - f(x^-)]/2 \operatorname{sen}(t/2)$ ser contínua por partes no intervalo $-\pi \leq t \leq 0$.

O resultado decorre do lema anterior. \square

Uma consequência importante é a unicidade da série de Fourier.

Teorema 8 (Unicidade da Série de Fourier). Suponha que f e g sejam 2π -periódicas e de classe C^1 por partes em $[-\pi, \pi]$. Se as séries de Fourier de f e de g coincidem, então $f = g$ a menos de uma quantidade finita de pontos do intervalo $[-\pi, \pi]$.

Demonstração. Ambas deverão coincidir nos interiores dos intervalos em que elas forem contínuas. \square

B.2. Integração e derivação.

Teorema 9 (Derivação). Se f for função contínua, 2π -periódica, cuja série de Fourier seja $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, e se f e sua derivada f' forem C^1 por partes em $[-\pi, \pi]$, então a série de Fourier de f' será $\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \operatorname{sen} nx)$, e para todo $x \in \mathbb{R}$, sua soma será $(f'(x^+) + f'(x^-))/2$.

Demonstração. A soma da série de Fourier de f' é $(f'(x^+) + f'(x^-))/2$, porque f' é de classe C^1 por partes.

Os coeficientes a'_n e b'_n de f' são

$$\pi a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt \, dt = \left[f(t) \cos nt \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} n f(t) \operatorname{sen} nt \, dt = \pi(n b_n),$$

$$\pi b'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} nt \, dt = \left[f(t) \operatorname{sen} nt \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} n f(t) \cos nt \, dt = -\pi(n a_n),$$

pois a função f é contínua e 2π -periódica e os primeiros termos do lado direito das igualdades anulam-se. \square

Teorema 10 (Integração). Se f for função 2π -periódica, contínua por partes em $[-\pi, \pi]$ e cuja série de Fourier seja $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, então $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt - a_0 x/2$ é contínua em $[-\pi, \pi]$ e admite extensão 2π -periódica, e sua série de Fourier será $A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx)$, $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\tau) \, d\tau$, e para todo $x \in \mathbb{R}$, sua soma será $F(x)$.

Demonstração. A periodicidade de F segue da de f e de

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = 0.$$

A relação entre os coeficientes de F e f decorrem do teorema anterior. \square

B.3. Teorema de Fejér. Para demonstrarmos a identidade de Parseval para funções C^1 por partes, precisamos de um teorema de convergência mais refinado, devido ao matemático húngaro Lipót Fejér (1880-1959). Para isto, precisamos da seguinte definição.

Definição 2. Seja f uma função 2π -periódica limitada, integrável no intervalo $[-\pi, \pi]$, e seja $S_N(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$, $N \geq 0$, a sequência de somas parciais da série de Fourier de f (que existe, pois como f é limitada e integrável, existem as integrais que definem os coeficientes a_n e b_n). Definimos a nova sequência (que não é uma série)

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Lema 6. A sequência $\sigma_n(x)$ pode ser calculada pela integral

$$\sigma_n(x) = \frac{2}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}((n+1)t)}{\operatorname{sen} t} \right)^2 dt.$$

Demonstração. Sabemos que

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\text{sen}((2N+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)} dt.$$

A mudança de variáveis $u = -t$, $du = -dt$ produz (verifique!)

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \frac{\text{sen}((2N+1)u/2)}{\text{sen}(u/2)} du.$$

Juntamos as duas (e usando u como variável de integração) e obtemos

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \left(\frac{\text{sen}((2N+1)u/2)}{\text{sen}(u/2)} \right) du.$$

A função de u dentro da integral é função par de u . Usamos isto e mais a mudança de variáveis $2t = u$, $2 dt = du$, e chegamos à integral

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \left(\frac{\text{sen}((2N+1)t)}{\text{sen } t} \right) dt.$$

Tudo isto para obtermos

$$\begin{aligned} \sigma_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(x) = \\ &= \frac{1}{(N+1)\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2 \text{sen } t} \left[\sum_{n=0}^N \text{sen}((2n+1)t) \right] dt. \quad (*) \end{aligned}$$

Observe que se $t \neq k\pi$, então $\text{sen } t \sum_{n=0}^N \text{sen}((2n+1)t) = \text{sen}^2((N+1)t)$, $N \geq 0$. Verifica-se isto por indução em N ; o caso $N = 0$ é trivial; se valer $\text{sen } t \sum_{n=0}^N \text{sen}((2n+1)t) = \text{sen}^2((N+1)t)$, então

$$\text{sen } t \sum_{n=0}^{N+1} \text{sen}((2n+1)t) = \text{sen}^2((N+1)t) + \text{sen } t \text{sen}((2N+3)t);$$

como $2 \text{sen } t \text{sen}((2N+3)t) = \cos(2(N+1)t) - \cos(2(N+2)t) = -2 \text{sen}^2((N+1)t) + 2 \text{sen}^2((N+2)t)$, temos

$$\text{sen}^2((N+1)t) + \text{sen } t \text{sen}((2N+3)t) = \text{sen}^2((N+2)t).$$

Agora é só substituir na integral (*). □

Vamos explorar melhor essa integral.

Definição 3. A sequência de funções

$$\mathbf{K}_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\text{sen}((n+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^2$$

é chamada de **núcleo de Fejér**.

Observação 5. Está definida em todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mas existem os limites $\lim_{t \rightarrow 2k\pi} \mathbf{K}_n(t) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Isto permite definir cada $\mathbf{K}_n(t)$ em todo \mathbb{R} , por $\mathbf{K}_n(2k\pi) = 1$, de modo que seja função 2π -periódica e contínua em \mathbb{R} .

Lema 7. O núcleo de Fejér $\mathbf{K}_n(t)$ satisfaz as seguintes propriedades.

- (1) Dados $\varepsilon, \delta > 0$, $\delta < \pi$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$ e todo $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, $|\mathbf{K}_n(t)| < \varepsilon$.
- (2) Para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{K}_N(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demonstração. Dado $\delta > 0$, $\delta < \pi$, então $|\text{sen}(t/2)| \geq \text{sen}(\delta/2)$, para todo $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Portanto,

$$0 \leq \mathbf{K}_n(t) \leq \frac{1}{(n+1) \text{sen}(\delta/2)}.$$

Basta, então, escolher n_0 , tal que, para todo $n \geq n_0$, a fração do lado direito da desigualdade seja menor que ε .

Para calcular a integral, usamos $[\text{sen } t \sum_{n=0}^N \text{sen}((2n+1)t)] = \text{sen}^2((N+1)t)$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \mathbf{K}_N(t) dt &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}((2n+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)} dt = \\ &= \frac{2}{N+1} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}((2n+1)t)}{\text{sen}(t)} dt = \frac{1}{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}((2n+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)} dt. \end{aligned}$$

Cada uma destas integrais é $\pi/2$ vezes a soma parcial $S_n(0)$ da série de Fourier da função constante $f(x) = 1$. \square

Com isto podemos demonstrar o seguinte teorema de convergência.

Teorema 11 (Fejér). Seja f uma função 2π -periódica e C^1 por partes.

- (1) Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

- (2) Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, então a convergência será uniforme neste intervalo (o n_0 não dependerá de $x \in [a, b]$).
- (3) Para todo t , e todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq \sigma_N(t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

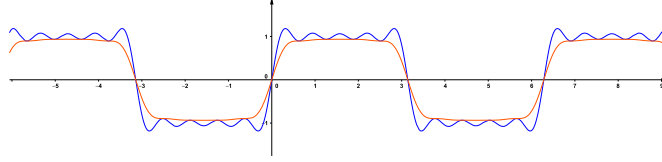


FIGURA 4. Comparação entre $S_9(x)$ (em azul) e $\sigma_9(x)$ (em vermelho) para $f(x) = x/|x|$, $-\pi < x < \pi$.

Demonstração. Podemos supor que $f(x) = (f(x^+) + f(x^-))/2$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (basta trocar f por uma outra função que coincida com f em seus pontos de continuidade e por esta média aritmética nos de descontinuidade).

Para cada $\delta > 0$, $\delta < \pi/2$, temos que

$$\begin{aligned} |\sigma_N(x) - f(x)| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi/2} \left[\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} - f(x) \right] \mathbf{K}_N(t) dt \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\delta + \int_\delta^{\pi/2} (\dots) dt \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\delta (\dots) dt \right| + \frac{2}{\pi} \left| \int_\delta^{\pi/2} (\dots) dt \right|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$, tal que para todo t , $|2t| < \delta$, $|(f(2t) + f(-2t))/2 - f(0)| < \varepsilon$. Daí,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\delta/2} \left[\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} - f(x) \right] \mathbf{K}_N(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta/2} \left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} - f(x) \right| \mathbf{K}_N(t) dt < \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{K}_N(t) dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Sejam $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$, e N_0 , tal que para todo $N \geq N_0$, $(2/\pi) \int_\delta^{\pi/2} \mathbf{K}_N(t) dt < \varepsilon/3M$. Então

$$\frac{2}{\pi} \left| \int_\delta^{\pi/2} \left[\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} - f(x) \right] \mathbf{K}_N(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_{\delta/2}^{\pi/2} \left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} - f(x) \right| \mathbf{K}_N(t) dt < 3M \int_{\delta/2}^{\pi/2} \mathbf{K}_N(t) dt < \varepsilon.$$

Assim, obtivemos a convergência desejada.

.....

Suponha que f seja contínua no intervalo $[a, b]$. Então ela é uniformemente contínua neste intervalo (os ε e δ da definição de continuidade não dependem de $x \in [a, b]$; isto não é trivial, mas vamos assumir este resultado). Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$, tal que para todo $\bar{x} \in [a, b]$ e todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $|x - \bar{x}| < 2\delta$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Escrevemos $2t = x - \bar{x}$ e obtemos para $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |\sigma_N(x) - f(x)| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\delta (\dots) dt + \int_\delta^{\pi/2} (\dots) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^\delta |(\dots)| dt + \frac{2}{\pi} \int_\delta^{\pi/2} |(\dots)| dt. \end{aligned}$$

Seja N_0 , tal que para todo $N \geq N_0$, a segunda integral seja menor que ε . Como $x \in [a, b]$, a escolha de $\delta > 0$ implica que a primeira integral também será menor que ε . Como δ e N_0 não dependem de $x \in [a, b]$, $\sigma_N(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

.....

A aplicação da desigualdade $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq f(t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ na integral que resulta em $\sigma_N(x)$ produz a desigualdade $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq \sigma_N(t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. \square

B.4. Identidade de Parseval. A identidade de Parseval pode ser expressa de duas maneiras. A primeira envolve a norma ao quadrado da função, e a segunda envolve o produto escalar de duas funções.

Teorema 12 (Identidade de Parseval-I). Seja f uma função 2π -periódica e de classe C^1 por partes em $[-2\pi, \pi]$ e $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ sua série de Fourier. Então

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \|f\|^2.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Bessel,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \|f\|^2 < \infty,$$

ou seja, a série $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$ é convergente.

Precisamos mostrar que a sua soma é igual a $\|f\|^2$. Isto decorre de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - \sigma_N(t)]^2 dt = 0,$$

pois, se escrevermos $A_0(x) = a_0/2$, e $A_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - \sigma_N(t)]^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(t) \right]^2 dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{N-n}{N+1} A_n(t) \right]^2 dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - S_N(t) + \sum_{n=1}^N \frac{n}{N+1} A_n(t) \right]^2 dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_N(t)]^2 dt + \frac{\pi}{(N+1)^2} \sum_{n=1}^N n^2 (a_n^2 + b_n^2), \end{aligned}$$

pois $\langle f - S_N, \sum_{n=1}^N \frac{n}{N+1} A_n \rangle = 0$.

Estas duas últimas expressões são positivas, e como sua soma tende a zero, cada uma delas tem que tender a zero. Portanto, a integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_N(t)]^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

também tende a zero, obtendo a identidade desejada.

.....

Passemos à demonstração de que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - \sigma_N(t)]^2 dt = 0.$$

Uma simples mudança de variáveis produz

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\text{sen}((2N+1)t/2)}{\text{sen}(t/2)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{\text{sen}((2N+1)(t-x)/2)}{\text{sen}((t-x)/2)} dt.$$

Daí,

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N S_n(x) = \frac{1}{2(N+1)\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{\text{sen}^2((2N+1)(t-x)/2)}{\text{sen}^2((t-x)/2)} f(t) dt.$$

Se $0 < \delta < \pi$, podemos escrever esta última integral como soma de três integrais

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N S_n(x) &= \frac{1}{2(N+1)\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{\text{sen}^2((2N+1)(t-x)/2)}{\text{sen}^2((t-x)/2)} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{2(N+1)\pi} \left[\int_{x-\pi}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{x+\pi} \right] \frac{\text{sen}^2((2N+1)(t-x)/2)}{\text{sen}^2((t-x)/2)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Como f é de classe C^1 por partes, f é integrável e, portanto, $f(t)\mathbf{K}_N(t)$ também é integrável, isto é, sua somas de Riemann converge para a integral.

Seja $A > 0$, tal que $|f(x)| \leq A$ e, portanto, $|\sigma_N(x)| \leq A$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $N \geq 0$. Particionamos o intervalo $[-\pi, \pi]$ em $r > 0$ subintervalos de tamanho $\Delta_r = 1/r$ cada, que enumeramos em ordem crescente como I_1, \dots, I_r .

Sejam $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(t)$, $1 \leq k \leq r$.

Sejam $x_k \in I_k$, o ponto médio de I_k , e $\delta = \Delta_r/2$. Seja

$$B = \int_{x-\pi}^{x+\pi} |f(t)| dt.$$

Daí, $m_k \leq f(x_k) \leq M_k$, e

$$\begin{aligned} \frac{m_k \delta}{\pi} &\leq \frac{1}{\pi} \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} f(t) dt \leq \frac{M_k \delta}{\pi}, \\ \frac{1}{\pi} \left[\int_{x_k-\pi}^{x_k-\delta} + \int_{x_k+\delta}^{x_k+\pi} \right] |f(t)| \mathbf{K}_N(t-x_k) dt &\leq \frac{A}{(N+1) \text{sen}^2(\delta/2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k - \sigma_N(x_k) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x_k-\pi}^{x_k-\delta} + \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} + \int_{x_k+\delta}^{x_k+\pi} \right] (M_k - f(t)) \mathbf{K}_N(t-x_k) dt \geq \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x_k-\pi}^{x_k-\delta} + \int_{x_k+\delta}^{x_k+\pi} \right] (M_k - f(t)) \mathbf{K}_N(t-x_k) dt \geq \end{aligned}$$

$$\geq -\frac{1}{2(N+1)\pi} \left[\int_{x_k-\pi}^{x_k-\delta} + \int_{x_k+\delta}^{x_k+\pi} \right] \frac{|M_k| + |f(t)|}{\text{sen}^2(\delta/2)} dt.$$

Daí, obtemos a desigualdade

$$\sigma_N(x_k) \leq M_k + \frac{|M_k| + B/2}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)}$$

De modo análogo, trabalhamos com $\sigma_N(x_k) - m_k$ e obtemos a desigualdade

$$\sigma_N(x_k) \geq m_k - \frac{|m_k| + B/2}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)}.$$

Destas duas desigualdades (junto com $|m_k|, |M_k| \leq A$) deduzimos mais duas desigualdades

$$|f(x_k) - \sigma_N(x_k)| \leq M_k - m_k + \frac{2A}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)}, \quad \text{e}$$

$$|f(x_k) - \sigma_N(x_k)| \leq 2A \left[1 + \frac{1}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)} \right].$$

Como $f(t)$ e $\sigma_N(t)$ são (Riemann)-integráveis, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que podemos escolher $\delta = 2\pi/r$, para algum $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$), tal que para toda partição P do intervalo $[-\pi, \pi]$ em subintervalos de tamanhos no máximo δ , e toda escolha de pontos \bar{x}_j em cada intervalo $[x_j, x_{j+1}] \in P$, temos

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \sigma_n(t))^2 dt - \sum_j (f(\bar{x}_j) - \sigma_n(\bar{x}_j))^2 \Delta x_j \right| < \varepsilon.$$

Podemos escolher, em particular os pontos médios \bar{x}_j dos intervalos $I_j = [x_j, x_{j+1}]$. Na notação das desigualdades obtidas acima, escolhemos $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $N \geq N_0$,

$$\frac{2A}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)} < \varepsilon, \quad \text{e} \quad 2A \left[1 + \frac{1}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)} \right] < \varepsilon.$$

Depois, escolhemos $\delta = 2\pi/r > 0$, tal que $\sum_j (M_j - m_j)\Delta_j < \varepsilon$, onde $\Delta_j = \delta$.

Com isto, obtemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - \sigma_N(t)]^2 dt \leq$$

$$\leq \frac{2A}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)} \left[\sum_j (M_j - m_j)\delta + \frac{4Ar}{(N+1)\text{sen}^2(\delta/2)} \right] \rightarrow 0,$$

quando $N \rightarrow \infty$. Com isto terminamos a demonstração. \square

Teorema 13 (Identidade de Parseval-II). Sejam f e g duas funções 2π -periódicas e de classe C^1 por partes em $[-2\pi, \pi]$ e $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ e $S(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$ as suas respectivas séries de Fourier. Então

$$\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = \langle f, g \rangle.$$

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior às funções $h_1(x) = f(x) + g(x)$ e $h_2(x) = f(x) - g(x)$, lembrando que as séries envolvidas são absolutamente convergentes, o que permite reagrupar os termos e obter o mesmo limite.

Assim, do teorema anterior, deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) \pm g(x)]^2 dx &= \frac{(a_0 \pm A_0)^2}{2} + \sum_{n \geq 1} [(a_n \pm A_n)^2 + (b_n \pm B_n)^2] = \\ &= \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) \right) + \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (A_n^2 + B_n^2) \right) \pm \\ &\quad \pm 2 \left(\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n A_n + b_n B_n) \right). \end{aligned}$$

Como $4\langle f, g \rangle = \|f + g\|^2 - \|f - g\|^2$, obtemos o resultado desejado. \square

REFERÊNCIAS

- [1] Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematical Series, Belmont, California, EUA, 1992.
- [2] Ytzhak Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, segunda edição corrigida, Dover Publications, Inc., Nova Iorque, EUA, 1976.
- [3] Konrad Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Dover Publications Inc., Nova Iorque, EUA, 1990.
- [4] Murray R. Spiegel, *Cálculo Avançado*, McGraw-Hill do Brasil, Ltda., 1978.
- [5] Michael Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, EUA, 1994.
- [6] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 3ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1920.