EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA A ENGENHARIA VIA EXEMPLOS

RICARDO BIANCONI

Resumo. Este é um resumo de equações diferenciais ordinárias para a disciplina de Cálculo IV para Engenharia. O foco é a solução de cada tipo de equação, com exemplos tirados de modelos da Física, Biologia e outras áreas afins. Algumas equações a derivadas parciais podem ser reduzidas a um sistema de equações diferenciais ordinárias (independentes) pelo *Método da Separação de Variáveis*. Este método será ilustrado no caso especial da *Equação de Laplace* (que é satisfeita por potencial eletrostático em uma região sem cargas; ou por difusão de calor; e outras aplicações).

Sumário

Esta versão: novembro de 2021.

1. Introdução

Equações diferenciais aparecem em muitas modelagens matemáticas de fenômenos físicos, químicos, biológicos e até em finanças. Algumas dessas equações diferenciais são a derivadas parciais (abreviadas EDP), ou seja, admitem mais de uma variável independente (por exemplo, a equação do calor, a equação da onda, a equação de Laplace, etc), cuja teoria pode ser bem complicada. As que admitem apenas uma variável independente são chamadas de equações diferenciais ordinárias (EDO), que têm uma teoria mais tratável e também servem para resolver algumas das EDP's.

Este texto é voltado para os cursos de ciências aplicadas, como engenharia, física e outras, e pretende apresentar o problema de como resolver certas equações diferenciais ordinárias que possam surgir em modelagens diversas. O foco principal deste texto é a apresentação de equações específicas que aparecem em diversas áreas, indicadas em cada exemplo. Esse material também serve como requisito para o estudo mais aprofundado de Sistemas Dinâmicos e Controle.

Uma questão que surge naturalmente aqui é *por que obter soluções exatas de equações, se podemos resolvê-las com um computador*? De fato, existem métodos numéricos bastante eficientes para resolver *alguns tipos de equações*. Dois problemas podem aparecer (e, pela *Lei de Murphy*, quase sempre aparecem) são:

(A) o custo da computação (problemas que requerem muita precisão exigem muito tempo de computação) pode ser reduzido se obtivermos uma solução exata que requeira menor custo computacional; consulte o livro de Birkhoff e Rota [1, Capítulos 8 e 9] sobre métodos de aproximação de soluções;
(B) singularidades ou aproximações imprecisas podem gerar uma resposta falsa ao problema (por exemplo, a discretização usada pode ocultar componentes de alta frequência da solução).

O segundo desses problemas já é tratado na Seção 2, que apresenta o Teorema de Existência e Unicidade de soluções de uma equação. As seções seguintes tratam de resolver vários tipos de equações.

Para um estudo mais aprofundado de equações diferenciais ordinárias, consultem-se os textos [1], [2]. Os Apêndices tratam de problemas algébricos necessários para este estudo.

2. Teoremas de Existência e Unicidade

Toda equação diferencial ordinária de ordem n, $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, pode ser transformada em um sistema de equações de primeira ordem pela introdução de novas variáveis. Digamos que $y^{(n)}$ possa ser isolada em F; senão, utilizamos

$$G(x, y', \ldots, y^{(n+1)})) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \ldots \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)};$$

isolamos $y^{(n)} = H(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ (ou $y^{(n+1)} = H(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, no segundo caso), e introduzimos novas coordenadas $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ (no caso de usarmos F; Y_n, se usarmos G) e escrevemos o sistema de equações $Y_0' = Y_1$, $Y_1' = Y_2$, $\ldots$, $Y_n' = H(x, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$. Resumidamente, denotamos este sistema como $Y' = A(x, Y)$, com Y, Y' e $A(x, Y)$ vetores de funções.

Passemos ao problema da possibilidade de solução do sistema $Y' = A(x, Y)$. Seja (x_0, ξ_0) um ponto do domínio de $A(x, Y)$. A primeira pergunta a ser respondida é se existe (pelo menos localmente) uma solução $Y(x)$ desse sistema satisfazendo a **condição inicial** $Y(x_0) = \xi_0$.

O primeiro resultado, devido a G. Peano, dá resposta afirmativa à questão, no caso de $A(x, Y)$ ser contínua e limitada em uma região.

Teorema 1 (Teorema de Existência de Peano)**.** Suponha que a função $A(x, Y)$ seja contínua se $|x - x_0| \leq T$ e $\|Y - \xi_0| \leq K$, e que nesta região valha $\|A(x, Y)\| \leq M$. Então existe uma solução $Y(x)$, $|x - x_0| \leq T_1 = \min\{T, K/M\}$, da equação $Y' = A(x, Y)$, satisfazendo a condição inicial $Y(x_0) = \xi_0$.

A demonstração deste teorema encontra-se, por exemplo, em [1, Capítulo 6, §10, Teorema 9, pp. 191-193]. A ideia é escrever esta equação de uma forma equivalente

$$Y(x) = \xi_0 + \int_{x_0}^{x} A(x, Y(x))\, dx.$$

A partir disso, definimos uma sequência de funções $y_0(x) = \xi_0$, constante, e para $n \geq 1$, $y_n(x) = \xi_0$, se $x_0 \leq x - \leq x_0 + T_1/(n+1)$, e $y_n(x) = \xi_0 + \int_{x_0}^{x} A(x, y_{n-1}(x)\, dx$, se $T_1/(n+1) < x \leq T_1$. A parte difícil é mostrar que esta sequência de funções possui uma subsequência que converge para uma solução no intervalo dado. Pode haver mais de uma solução neste caso.

Exemplo 1 (Uma equação sem unicidade de soluções)**.** A equação $y' = 3y^{2/3}$ tem infinitas soluções com a condição inicial $y(0) = 0$. Por exemplo, $y(x) = 0$ é uma solução, bem como $y(x) = x^3$. Mais soluções, são $y(x) = 0$, se $x \leq 0$ e $y(x) = x^3$ se $x \geq 0$; ou $y(x) = (x - a)^3$, se $x < a$, $y(x) = 0$, se $a \leq x < 0$ e $y(x) = x^3$, se $x \geq 0$, para algum $a < 0$; ou ainda, $y(x) = x^3$ se $x < 0$ e $y(x) = 0$ se $x \geq 0$; e não esgotamos todas as possibilidades!

Isto é um desastre para engenheiros. Se esta equação modelar alguma coisa, não se pode prever qual será seu comportamente. Qualquer ruído pode fazer que a solução mude de uma para outra.

Onde está o problema?

Observe que a função $A(x,y) = y^{2/3}$ é contínua e limitada em qualquer retângulo do plano, centrado na origem; e que ela é diferenciável apenas nos pontos fora do eixo x (isto é, fora da reta $y = 0$), e sua diferencial não é limitada em nenhuma região que contenha algum ponto do eixo x em seu interior. Na verdade, este é o problema.

Definição 1. A função $A(x,Y)$ satisfaz a **condição de Lipschitz** em uma região D (e nas variáveis Y) se existir uma constante positiva L, tal que se $(x,Y), (x,Z) \in D$, então $\|A(x,Y) - A(x,Z)\| \leq L\|Y - Z\|$.

A função $A(x,y) = y^{2/3}$ não satisfaz a condição de Lipschitz em nenhuma região contendo pontos do eixo x (ou seja, $y = 0$):

$$|y^{2/3} - 0| = |y^{-1/3}|\,|y - 0|,$$

e o termo $|y^{-1/3}|$ não é limitado perto de $y = 0$.

Observação 1. Se a função $A(x,Y)$ for derivável em D, então ela satisfará a condição de Lipschitz em qualquer subconjunto fechado e limitado desta região.

Teorema 2 (Existência e Unicidade)**.** Se a função $A(x,Y)$ for contínua e satisfizer a condição de Lipschitz em uma região D (em particular, se for de classe C^1 neste região), então existe uma única solução $Y(x)$ satisfazendo a condição inicial $Y(x_0) = \xi_0$.

Método de Picard. A sua demonstração segue as linhas do Teorema de Peano acima, e a condição de Lipschitz garante que a sequência de funções $y_n(x)$ converge para uma única função que resolve a equação diferencial. Em uma regiâo em que $\|Y\| \leq M$ e $|x - x_0| \leq B$, temos

$$\|Y_{n+1}(x) - Y_n(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} (A(t, Y_n(t)) - A(t, Y_{n-1}(t)))\; dt \right\| \leq K \left| \int_{x_0}^{x} M\, dt \right|,$$

ou seja, teremos $\|Y_{n+1}(x) - Y_n(x)\| \leq KM|x - x_0|$. Usando esta desigualdade, obtemos

$$\|Y_{n+2}(x) - Y_n(x)\| \leq KM \int |t - x_0|\, dt = KM \frac{|x - x_0|^2}{2},$$

$$\|Y_{n+3}(x) - Y_n(x)\| \leq KM \int \frac{|t - x_0|^2}{2}\, dt = KM \frac{|x - x_0|^3}{3!},$$

e assim por diante, obtendo, em geral,

$$\|Y_{n+\ell}(x) - Y_n(x)\| \leq KM \int \frac{|t - x_0|^{\ell-1}}{(\ell - 1)!}\, dt = KM \frac{|x - x_0|^{\ell}}{\ell!},$$

que tende a zero. Esta desigualdade, junto com teoremas apropriados de Análise Matemática, garante que a sequência de funções (vetoriais) $Y_n(x)$ convergirão à solução da equação $Y' = A(x, Y)$, com $|x - x_0| \leq B$. $\square$

Observação 2. No exemplo $y' = 3y^{2/3}$ vale a existência e unicidade em qualquer região (conexa) que não contenha pontos do eixo x.

Exemplo 2 (Ilustração do Método de Picard)**.** Considere a equação $y' = y$, que tem por solução a função exponencial $y(x) = Ce^x$. Aplicamos o Método de Picard à equação, com condição inicial $y(0) = 1$, e obtemos

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 && = 1 \\
y_1(x) &= 1 + \textstyle\int_0^x 1\,dt && = 1 + x \\
y_2(x) &= 1 + \textstyle\int_0^x (1+t)\,dt && = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} \\
y_3(x) &= 1 + \textstyle\int_0^x \left(1 + t + \tfrac{t^2}{2}\right) dt && = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} \\
y_4(x) &= 1 + \textstyle\int_0^x \left(1 + t + \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{3!}\right) dt && = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} \\
y_4(x) &= 1 + \textstyle\int_0^x \left(1 + t + \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{3!} + \tfrac{t^4}{4!}\right) dt && = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^5}{5!} \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

Perceba que a sequência $y_n(x)$ compõe-se dos polinômios de Taylor da função $y(x) = e^x$.

A condição de Lipschitz do campo vetorial tem ainda uma consequência importante. As soluções variam continuamente com a condição inicial.

Teorema 3 (Continuidade de Soluções)**.** Se a função $A(x, Y)$ for contínua e satisfizer a condição de Lipschitz ($\|A(x, Y_1) - A(x, Y_2)\| \leq L\|Y_1 - Y_2\|$) em uma região D (em particular, se for de classe C^1 nesta região), então duas soluções $Z_1(x)$ e $Z_2(x)$ da equação $Y' = A(x, Y)$ satisfazem $|Z_1(x) - Z_2(x)| \leq \exp(L(x - x_0))|Z_1(x_0) - Z_2(x_0)|$, $x > x_0$. Ou seja, as soluções variam continuamente com a variação da condição inicial.

3. Equações de primeira ordem

Vamos resolver equações diferenciais de primeira ordem. Elas podem aparecer nas formas $y' = f(x, y)$, ou $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, ou também $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ (na forma de campo vetorial $\vec{v} + (P, Q)$). Todas são equivalentes e resolvê-las reduz-se a achar uma função de duas variáveis (de classe C^1) $F(x, y)$, de modo que suas curvas de nível sejam soluções (implícitas) da equação. Na forma vetorial, isto significa que o campo vetorial (P, Q) será paralelo ao campo ∇F (o gradiente de F).

Seria bom se esses campos fossem iguais.

3.1. **Equações exatas.** As equações exatas podem ser resolvidas diretamente, resolvendo $\nabla F = (P, Q)$. Para campos (P, Q) de classe C^1, isto significa que eles admitem um potencial F (campos conservativos). Daí, devem ser **irrotacionais**, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Entretanto, sabemos que isto não é suficiente, pois o bem conhecido campo

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

é irrotacional, mas não é conservativo no plano menos a origem; mas é *localmente* conservativo (restringindo a um domínio simplesmente conexo).

Exemplo 3 (Campo de forças central)**.** Um campo de forças central é da forma $\vec{v} = g(x^2 + y^2)(x, y)$ (em um sistema de coordenadas conveniente), com g de classe C^1 fora da origem. O campo elétrico (ou também gravitacional) gerado por partícula carregada colocada na origem é assim, com $g(x^2 + y^2) = k/(x^2 + y^2)$, para uma constante adequada k.

Um campo central dá origem a uma equação de primeira ordem exata $g(x^2 + y^2)x\,dx + g(x^2 + y^2)y\,dy = 0$ com potencial $F(x, y) = \int_a^{x^2+y^2} g(t)\,dt$.

Exemplo 4. Restrimos o domínio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \ \&\ y = 0\}$ (o plano, menos o semieixo negativo dos x, que é simplesmente conexo), e, assim, o campo

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

torna-se conservativo em D e admite um potencial

$$F(x, y) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

3.2. **Equações a variáveis separáveis.** Mesmo com campos com rotacional não nulo, é possível resolver a equação $P\,dx + Q\,dy = 0$. O caso geral é bem difícil, mas existem alguns casos tratáveis. O primeiro caso, o mais simples, trata-se de equações a variáveis separáveis, em que $P(x, y) = P_1(x)Q_1(y)$ e $Q(x, y) = P_2(x)Q_2(y)$. A ideia é separar tudo que depende de x de tudo que depende de y, ou seja, transformar a equação $P_1(x)Q_1(y)\,dx + P_2(x)Q_2(y)\,dy = 0$ em $P_1(x)/P_2(x)\,dx + Q_2(y)/Q_1(y)\,dy = 0$, que é irrotacional e, portanto, localmente conservativo.

Mas, **CUIDADO!** Isto significa dividir a equação pela expressão $Q_1(y)P_2(x)$, o que impõe a restrição $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$. Isso descarta as possíveis soluções constantes $y(x) = y_0$, para cada y_0 que anula $Q_1(y)$.

Assim, o problema divide-se em:

(1) primeiro verificar a existência de soluções constantes $y(x) = y_0$, para cada y_0 que anula $Q_1(y)$;
(2) depois resolver a equação exata $P_1(x)/P_2(x)\,dx + Q_2(y)/Q_1(y)\,dy = 0$.

Exemplo 5 (Equações lineares homogêneas)**.** Para resolver a equação $a(x)y' + b(x)y = 0$, com coeficientes $a(x)$ e $b(x)$ de classe C^1, observe que a função constante $y = 0$ é solução. Obtemos outras soluções, com $y \neq 0$, separando as variáveis

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)},$$

e resolvemos por integração, com condição inicial $y(x_0) = y_0 \neq 0$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{y} dx = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{|y(x)|}{|y_0|} = -\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt.$$

Isto resulta em

$$|y(x)| = |y_0| \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt\right].$$

Observe que o sinal positivo, ou negativo, de $y(x)$ tem que ser igual ao de y_0, devido à unicidade da solução (pois, senão, $y(x)$ teria que trocar de sinal, passando pelo zero e, aí, cruzaria com a solução nula). Assim, a solução sem módulo é

$$y(x) = y_0 \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt\right].$$

Exemplo 6 (Movimento resistido em fluido-I)**.** Sabe-se que um corpo esférico de massa m caindo verticalmente sob a ação da gravidade, em meio fluido de alta viscosidade e com baixa velocidade, sofre resistência do fluido proporcional à sua velocidade, $F = -kv$.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

A função constante $v(t) = mg/k$ é solução. As outras soluções são obtidas pelo método da separação de variáveis

$$\frac{m}{mg - kv}\frac{dv}{dt} = 1.$$

Integramos, usando a condição inicial $v(0) = v_0 \neq mg/k$,

$$\int_0^T \frac{m}{mg - kv}\frac{dv}{dt} dt = \int_{v_0}^{v(T)} \frac{m}{mg - kv} dv = -\frac{m}{k} \ln\left|\frac{kv(T) - mg}{kv_0 - mg}\right| = \int_0^T 1\, dt = T.$$

Pela unicidade da solução, os sinais das expressões $(kv(T) - mg)$ e $(kv_0 - mg)$ são os mesmos (pois se fossem opostos, a solução $v(t)$ deveria cruzar a solução constante $v(t) = mg/k$). Daí, o módulo no logaritmo é desnecessário. Assim,

$$v(T) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-kT/m}.$$

Exemplo 7 (Movimento resistido em fluido-II)**.** Sabe-se que um corpo esférico de massa m caindo verticalmente sob a ação da gravidade em meio fluido de baixa viscosidade sofre resistência do fluido proporcional ao quadrado de sua velocidade, $F = -kv^2$. A Segunda Lei de Newton descreve o movimento (força resultante igual à massa vezes aceleração)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

Esta é uma *Equação de Riccati*, que será explorada no Exemplo 22, página 23.

A função constante $v(t) = \sqrt{mg/k}$ é solução. Consideremos agora a condição inicial $v(0) = v_0 \neq \sqrt{mg/k}$. A equação pode ser resolvida por separação de veriáveis

$$\frac{m}{mg - kv^2}\frac{dv}{dt} = 1.$$

Integramos ambos os membros

$$\int_0^T \frac{m}{mg - kv^2}\frac{dv}{dt}dt = \int_{v_0}^{v(T)} \frac{1}{mg - kv^2}dv = \int_0^T 1\,dt = T,$$

obtemos

$$T = \int_{v_0}^{v(T)} \frac{1}{mg - kv^2}dv = \frac{m}{\sqrt{kmg}}\int_{v_0}^{v(T)} \left(\frac{1}{\sqrt{mg/k} - v} + \frac{1}{\sqrt{mg/k} + v}\right) dv =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{kmg}} \ln\left|\frac{\sqrt{mg/k} + v(T)}{\sqrt{mg/k} - v(T)}\,\frac{\sqrt{mg/k} - v_0}{\sqrt{mg/k} + v_0}\right|.$$

A unicidade da solução garante que os sinais das expressões

$$\frac{\sqrt{mg/k} + v(T)}{\sqrt{mg/k} - v(T)} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{mg/k} - v_0}{\sqrt{mg/k} + v_0}$$

são iguais e, portanto o módulo não é necessário no logaritmo. Daí, a resposta será

$$\left(\frac{\sqrt{mg/k} + v(T)}{\sqrt{mg/k} - v(T)}\right)\left(\frac{\sqrt{mg/k} - v_0}{\sqrt{mg/k} + v_0}\right) = e^{T\sqrt{kmg}/m}, \quad \text{ou}$$

$$v(T) = \frac{mg(e^{T\sqrt{kg/m}} - 1) + \sqrt{kmg}v_0(e^{T\sqrt{kg/m}} + 1)}{mg(e^{T\sqrt{kg/m}} - 1) + \sqrt{kmg}v_0(e^{T\sqrt{kg/m}} + 1)}.$$

Exemplo 8 (Fio Flexível-Catenária)**.** Um fio flexível de densidade linear ρ e comprimento $\ell > 2x_0$ tem suas extremidades fixas em dois pontos $(-x_0, y_0)$ e (x_0, y_0), e está em equilíbrio estático sob a ação da gravidade (na direção vertical paralela ao eixo y). A função $y(x)$ descreve sua forma e, devido à simetria do problema, deverá ser uma função par, $y(-x) = y(x)$, com ponto de mínimo em $x = 0$. Seja T_0 a força de tensão nesse ponto (que deve ser na direção horizontal) e seja $T(x)$ a tensão em um outro ponto $x > 0$ (que deve ser na direção da reta tangente ao gráfico de y em x). O equilíbrio de forças no trecho da corda entre 0 e x implica a igualdade das componentes horizontais $T_0 = T(x)\cos\theta$ e verticais $g\rho\ell(x) = T(x)\,\mathrm{sen}\,\theta$, onde θ é o ângulo que a reta tangente ao gráfico de y em x faz com o eixo x, e $\ell(x)$ é o comprimento do trecho do fio entre 0 e x, e $g\rho\ell(x)$ é o peso deste segmento do fio. Dividimos uma equação pela outra e obtemos $g\rho\ell(x) = T_0 \operatorname{tg}\theta = T_0 y'(x)$. O comprimento do segmento de fio é $\ell(x) = \int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,dt$. Assim, a equação é

$$T_0 y'(x) = g\rho \int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,dt.$$

A derivada em relação a x de ambos os membros desta equação produz

$$T_0 y'' = g\rho\sqrt{1+(y')^2},$$

que é uma equação de primeira ordem em $z = y'$ a variáveis separáveis, $T_0 z' = g\rho\sqrt{1+z^2}$.

Podemos dividir a equação por $\sqrt{1+z^2}$ (que nunca se anula) e calcular a integral indefinida

$$\int \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz = \int \frac{g\rho}{T_0}\,dx + C,$$

com a substituição $z = \operatorname{senh} t$, $dz = \cosh t\,dt$, e obtemos

$$t = \frac{g\rho}{T_0}x + C, \quad \text{ou} \quad z = \operatorname{senh}\,(C + g\rho x/T_0),$$

com $C = 0$, pois $z(0) = y'(0) = 0$ ($x = 0$ é ponto de mínimo de y).

Daí $y(x) = K + \frac{T_0}{g\rho}\cosh(g\rho x/T_0)$ e, com a condição $y(x_0) = y_0$, determinamos $K = y_0 - \frac{T_0}{g\rho}\cosh(g\rho x_0/T_0)$.

Observe que o comprimento do fio é

$$\ell = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(g\rho t/T_0)}\,dt = \frac{2T_0}{g\rho}\cosh(g\rho x_0/T_0),$$

o que fornece uma relação implícita entre T_0 e ℓ.

3.3. **Equações a coeficientes homogêneos.** A equação $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ chama-se de equação a coeficientes homogêneos se existir um número $k \in \mathbb{R}$, tal que para todo $t > 0$, $P(tx,ty) = t^k P(x,y)$ e $Q(tx,ty) = t^k Q(x,y)$ (o parâmetro t pode ser tirado em evidência em ambas as funções, elevado à mesma potência k). Observe que se a equação vier na forma $y' = f(x,y)$, então $Q(x,y) = 1$ e, portanto, $k = 0$.

Observe que um campo vetorial com coeficientes homogêneos tem direção e sentido constantes em cada semirreta partindo da origem.

O método de solução é via a transformação $y = xv$, com $y' = xv' + v$ (ou $dy = x\,dv + v\,dx$), que transforma a equação em uma outra a variáveis separáveis.

Exemplo 9 (Campos Homogêneos)**.** Algumas EDOs exatas também podem ser vistas como equações a coeficientes homogêneos.

$$(x^2+y^2)^\beta(x\,dx + y\,dy), \quad \text{ou, também,} \quad (x^2+y^2)^\beta(-y\,dx + x\,dy).$$

Ambos são campos conservativos em $\mathbb{R}^2$. Mas o método desta seção também se aplica.

Exemplo 10 (Espelho Parabólico)**.** A parábola é uma curva que tem a propriedade de todo raio partindo de um ponto (o *foco* da parábola) refletir-se sempre numa mesma direção (paralela ao *eixo* da parábola). Vamos determinar as curvas dadas por gráficos de funções $y = f(x)$ com a propriedade que toda reta que passa pela origem $O = (0, 0)$ reflete-se em um reta vertical pela curva. A reta $y = ax$ encontra o gráfico de $f(x)$ em $A = (x, f(x))$ formando uma ângulo (agudo) com a reta tangente ao seu gráfico igual ao ângulo que a reta vertical faz com a reta tangente. Consideremos os pontos em que $x \neq 0$. Seja B o ponto do eixo y pertencente à reta tangente. O ângulo agudo que a reta tangente forma com o eixo y é igual ao ângulo (agudo) que a reta $y = ax$ faz com a reta tangente, que também é igual ao ângulo (agudo) que a reta tangente faz com a reta vertical em A. Assim, o triângulo $\triangle OAB$ é isósceles, o que implica na igualdade $OB = OA = \sqrt{x^2 + f^2}$. A cotangente do ângulo OBA 'e igual a $(f(x) + \sqrt{x^2 + f^2})/x$, que também é igual à tangente do ângulo que a reta tangente faz com o eixo x, que é $f'(x)$. Escrevemos $f(x) = y$ e obtemos a equação (a coeficientes homogêneos)

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad x \neq 0.$$

Se $x > 0$, então $|x| = x$ e a equação torna-se $y' = (y/x) + \sqrt{1 + (y/x)^2}$, e se $x < 0$, $|x| = -x$ e a equação torna-se $y' = (y/x) + \sqrt{1 + (y/x)^2}$. A substituição $y = xv$, $y' = v + xv'$ transforma a equação em

$$v' = \sqrt{1 + v^2}, \quad \text{se } x > 0; \text{ ou } \quad v' = -\sqrt{1 + v^2}, \quad \text{se } x < 0;$$

integramos em relação a x (com a substituição $v = \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $dv = \cosh t\, dt$, $1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$ e, como $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$, $\sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$)

$$\int \frac{v'}{\sqrt{1 + v^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} dv = \int 1\, dt = t = \pm \ln |x| + C;$$

daí, $y/x = v = \operatorname{senh} t = \operatorname{senh}(\pm \ln |x| + C) = \pm \operatorname{senh}(\ln |x| + C) = \pm(e^C|x| - e^{-C}/|x|)/2$. Tanto para $x < 0$, quanto para $x > 0$, obtemos equação de parábolas $y = Kx^2 - K$.

3.4. **Fator integrante dependendo de uma variável.** A ideia de que que uma EDO de primeira ordem não exata pode ser sempre ser transformada em outra equação exata com mesmas soluções pela multiplicação por um **fator integrante** $\mu(x, y)$ já era conhecida no tempo do matemático alemão Leonhard Euler. Ele publicou em 1763 um trabalho[1] sobre um método geral de fatores integrantes, obtendo a equação

$$\frac{\partial \mu Q}{\partial x} = \frac{\partial \mu P}{\partial y},$$

[1]Leonhard Euler. "De integratione aequationum differentialium", *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1763, pp. 3–63; *Opera Omnia*: Series 1, Volume 22, pp. 334 - 394. Veja o Teorema 16, pp. 12–13. Veja a referência bibliográfica [3].

ou, em miúdos,

$$\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Em geral, essa equação a derivadas parciais é muito complicada e até impossível de se obter soluções explícitas. No entanto, alguns casos particulares úteis em aplicações são tratáveis, como veremos a seguir.

Fator integrante que depende somente de x.

Se a equação $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ (ou equivalentemente, $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$) admitir um fator integrante que dependa somente da variável x, então $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ e a equação do fator integrante reduz-se a

$$\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\frac{\partial P}{\partial y},\ \text{ ou }\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

A função

$$\mu(x)=\exp\left[\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\right]$$

resolve a equação do fator integrante.

ATENÇÃO: Verifique se realmente μ só depende de x: a expressão $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ não pode depender de y.

Exemplo 11 (Equações lineares)**.** Equações lineares de primeira ordem têm a forma $a(x)y'+b(x)y=c(x)$, ou $(b(x)y-c(x))+a(x)y'=0$. Assim, vemos que o campo vetorial correspondente $(P,Q)=(b(x)y-c(x),a(x))$. Neste caso

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{b(x)-a'(x)}{a(x)},$$

que realmente não depende de y.

Um fator integrante é $\mu(x)=\exp[\int(b(x)-a'(x))/a(x)\,dx]$ e a solução geral da equação é

$$y(x)=\left[\frac{C}{a(x)}+\int c(x)\exp\left(\int\frac{b(x)-a'(x)}{a(x)}dx\right)dx\right]\exp\left(-\int\frac{b(x)-a'(x)}{a(x)}dx\right)$$

Exemplo 12 (Equação de Bernoulli)**.** A equação diferencial de Bernoulli

$$y'+p(x)y=q(x)y^a$$

tem a solução trivial $y(x)=0$ constante (se $a>0$), e transforma-se em uma equação linear (com $y\neq 0$), multiplicando-a por y^{-a}, $y^{-a}y'+p(x)y^{1-a}=q(x)$, e com a mudança de variável $u=y^{1-a}$, $u'=(1-a)y^{-a}y'$,

$$(1-a)^{-1}u'+p(x)u=q(x).$$

A condição inicial $y(x_0)=y_0$ transforma-se na condição inicial $u(x_0)=y_0^{1-a}$ (com $y_0>0$, se a não for número racional com denominador ímpar).

Exemplo 13 (Equação Logística)**.** A equação diferencial logística é um caso particular da equação diferencial de Bernoulli,

$$y' - y = -y^2,$$

que se transforma em $u' + u = 1$, com solução $u(x) = Ce^{-}(x - x_0) + 1$ (com $C = u(x_0) - 1 = y_0^{-1} - 1$), ou

$$y(x) = \frac{1}{y_0^{-1}e^{-(x-x_0)} + 1} = \frac{e^{(x-x_0)}}{e^{(x-x_0)} + y_0^{-1}}.$$

Em particular, se $x_0 = 0$ e $y_0 = 1/2$, obtemos a *função logística*, com aplicações diversas,

$$y(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Fator integrante que depende somente de y.

Se a equação $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy = 0$ (ou equivalentemente, $P(x, y)+Q(x, y)y' = 0$) admitir um fator integrante que dependa somente da variável y, então $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ e a equação do fator integrante reduz-se a

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ ou } \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

A função

$$\mu(y) = \exp\left[\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy\right]$$

resolve a equação do fator integrante.

ATENÇÃO: Verifique se realmente μ só depende de y: a expressão $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ não pode depender de x.

Observação 3. Observe que se o campo $\vec{v}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ admitir um fator integrante que dependa somente de x, então o campo $\vec{w}(x, y) = (Q(y, x), P(y, x))$ admitirá um fator integrante que dependerá somente de y (faça as contas).

Exemplo 14. A equação $(y^2 + 1)\,dx + (xy + y^3 - y)\,dy = 0$ tem fator integrante que depende somente de y, pois

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{-y}{y^2 + 1},$$

e, portanto, $\mu(y) = 1/\sqrt{y^2 + 1}$. Um potencial F, cujo gradiente é $(\mu P, \mu Q) = (\sqrt{y^2 + 1}, (xy + y^3 - y)/\sqrt{y^2 + 1})$ é $F(x, y) = (x - 2)\sqrt{y^2 + 1} + (y^2 + 1)^{3/2}$, e a solução geral é $F(x, y) = C$.

Exemplo 15. A equação $(y^2-1)\,dx + [x-(y^2-1)\sqrt{y+1}]\,dy = 0$ admite fator integrante que depende somente de y, pois

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1-2y}{y^2-1}, \quad \text{ou} \quad \mu(y) = \frac{1}{y^2-1}\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}.$$

Um potencial para o campo $(\mu P, \mu Q)$ é

$$F(x,y) = x\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} - \frac{2(y-1)^{3/2}}{3},$$

e a solução geral é $F(x,y) = C$.

3.5. **Redução de ordem.** Certas EDOs de segunda ordem podem ser reduzidas a equações de primeira ordem e resolvidas pelos métodos acima.

Exemplo 16 (Equação do Pêndulo)**.** Um pêndulo simples consiste em uma barra sólida de comprimento ℓ, presa em um ponto com articulação e de massa desprezível em relação à massa m um corpo preso à outra extremidade da barra. Este corpo está sujeito à ação da gravidade. O movimento do corpo restringe-se à circunferência de raio ℓ. A componente da força peso mg que age na massa provocando o movimento é a componente tangente à circunferência, $mg\,\mathrm{sen}\,\theta$, onde θ é o ângulo orientado no sentido antihorário em relação à reta vertical. Aplicamos a Segunda lei de Newton, obtendo

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Observe que as funções constantes $\theta = 0 + 2k\pi$ e $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são soluções. Procuremos as soluções não constantes pelo artifício de considerar a velocidade angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ como função de θ e composta com com $\theta(t)$. Isso é possível em qualquer intervalo em que possamos inverter a função $\theta(t)$, fazendo $t = g(\theta)$, e tomando $\omega(\theta) = \omega \circ t(\theta)$. Com isso,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{dt}.$$

A equação do pêndulo transforma-se em

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

que é de primeira ordem em ω e a variáveis separáveis e tem solução

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

com $\theta_0 = \theta(t_0)$ a condição inicial. Para obter a solução $\theta(t)$, precisamos integrar em relação a t as funções $\omega = \pm\sqrt{C-(g/\ell)\cos\theta}$ (a escolha do sina também depende da condição inicial.

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{C-(g/\ell)\cos\theta}} = \pm 1, \quad \text{ou seja,} \quad \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{C-(g/\ell)\cos\theta}}d\theta = \pm(t-t_0).$$

A integral do lado esquerdo é uma **integral elíptica**.

Exemplo 17 (Equação de Liénard)**.** Algumas equações de segunda ordem podem ser reduzidas a equações de primeira ordem. A equação de Liénard é um exemplo útil para o estudo e modelagem de circuitos elétricos oscilantes. Um caso particular importante é o *oscilador de van der Pol*, [10].

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 em $\mathbb{R}$, tais que f seja função par ($f(-x) = f(x)$) e g seja ímpar ($g(-x) = -g(x)$). A equação (de Liénard) de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

não tem nenhum coeficiente que dependa da variável t e, consequentemente, pode ser reduzida a uma equação de primeira ordem pela mudança de variáveis $v = dx/dt$. Para que seja reduzida a uma equação que não dependa explicitamente de t, assumimos que, pelo menos localmente em algum intervalo I, $x : I \to \mathbb{R}$ seja invertível (ou seja, podemos isolar $t = t(x)$) e, portanto, podemos fazer $v(x) = \frac{dx}{dt}(t(x))$, e daí, $d^2x/dt^2 = dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = v(dv/dx)$. Assim, a equação de Liénard torna-se uma equação de primeira ordem

$$v\frac{dv}{dx} + f(x)v + g(x) = 0.$$

4. Equações diferenciais lineares

Resolvamos as equações lineares de ordem n, da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \qquad (*)$$

Observe que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem duas de suas soluções, então a diferença $y_H(x) = y_1(x) - y_2(x)$ será solução da **equação homogênea associada**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0. \qquad (\dagger)$$

Assim, para resolver totalmente uma equação linear, basta conhecer uma solução particular, $y_P(x)$, da equação $(*)$ e a solução geral da equação homogênea associada $(\dagger)$, $y_H(x)$, que a solução geral da equação $(*)$ será $y(x) = y_P(x) + y_H(x)$. A solução $y_H(x)$ conterá constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do problema.

4.1. Equações homogêneas com coeficientes constantes.

Comecemos com considerações de existência e unicidade de soluções da equação linear homogênea $(\dagger)$, mas com coeficientes constantes.

Observação 4. Consideremos o **polinômio característico** da equação $(\dagger)$, $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0$. Um teorema (difícil) de álgebra real declara que todo polinômio com coeficientes reais pode ser fatorado como produto de termos de grau 1 ou de grau 2 (sem raízes reais). Assim, podemos fatorar este polinômio

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_1}(\lambda - a_j)^{m_j} \cdot \prod_{k=1}^{n_2}[(\lambda - b_k)^2 + c_k^2]^{r_k},$$

com $n = \sum_j m_j + \sum_k r_k$, $c_k > 0$ $(1 \leq k \leq n_2)$, e os fatores exibidos são todos distintos. Uma conta simples mostra que

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y =$$

$$= \prod_{j=1}^{n_1} \left(\frac{d}{dx} - a_j\right)^{m_j} \cdot \prod_{k=1}^{n_2} \left[\left(\frac{d}{dx} - b_k\right)^2 + c_k^2\right]^{r_k} y.$$

Teorema 4 (Existência e Unicidade)**.** O conjunto de soluções da equação linear homogênea (†) forma um subespaço vetorial real de dimensão n dentro do espaço de todas as funções de classe C^∞ em $\mathbb{R}$. As soluções têm a seguinte forma:

(1) Se o polinômio característico $p(\lambda)$ da equação tiver um fator $(\lambda - a)^m$ (com $m > 0$ o maior possível), então o espaço das soluções tem o subespaço gerado pelas funções $x^j e^{ax}$, $0 \leq j < m$.
(2) Se o polinômio característico tiver um fator $[(\lambda - a)^2 + b^2]^m$ (com $m > 0$ o maior possível, e $b \neq 0$), então o espaço das soluções tem o subespaço gerado pelas funções $x^j e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ e $x^j e^{ax}\cos(bx)$, $0 \leq j < m$.

Demonstração. Primeiramente observe que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem duas soluções de (†), então qualquer combinação linear $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ será também uma solução. Além disso, temos a solução constante $y(x) = 0$. Portanto, o conjunto de todas as soluções de (†) forma um subespaço vetorial das funções de classe C^1 e, como $Y' = AY$, as soluções devem ser de classe C^2; indutivamente, obtemos que as soluções são de classe C^∞.

Podemos transformar a equação de ordem n (†) em um sistema de equações de primeira ordem $Y' = AY$, com o vetor de funções $Y = [Y_0, \ldots, Y_{n-1}]^t$ (o transposto de um vetor linha) e A uma matriz real quadrada $n \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_{n-1}/a_n & -a_{n-2}/a_n & -a_{n-3}/a_n & \ldots & -a_1/a_n & -a_0/a_n \end{pmatrix}.$$

Para cada condição inicial $\xi_j = [0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j-\text{ésima posição}}, 0, \ldots, 0]$, o Teorema de Existência e Unicidade garante a existência e unicidade da solução $Y_{(j)}(x)$ (em torno de $x = 0$), que satisfaça a condição inicial $Y_{(j)}(0) = \xi_0$. A primeira coordenada de cada um detes vetores, $y_j(x)$ $(1 \leq j \leq n)$ é uma solução da equação de ordem n. Precisamos mostrar que elas são linearmente independentes.

Se a combinação linear de soluções $\sum_j \lambda_j Y_{(j)}(x)$ se anular, deverá anular-se também em $x = 0$, ou seja, o vetor $\sum_j \lambda_j \xi_j = [\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}]$ será nulo. Como a $(j+1)$-ésima coordenada de cada Y_i é a derivada de sua j-ésima coordenada, concluímos que as funções $y_1, \ldots, y_n$ deverão ser linearmente independentes.

Para terminarmos a demonstração, escrevemos a equação homogênea como

$$\prod_{j=1}^{n_1}\left(\frac{d}{dx}-a_j\right)^{m_j}\cdot\prod_{k=1}^{n_2}\left[\left(\frac{d}{dx}-b_k\right)^2+c_k^2\right]^{r_k} y=0.$$

Vejamos as expressões que são anuladas pela aplicação de cada fator, começando com $\left(\frac{d}{dx}-a_j\right)^{m_j}$. Se $m_j=1$, a solução de $\left(\frac{d}{dx}-a_j\right)y=0$ é $y=C_{j,1}\,e^{a_jx}$; se $m_j=2$, então a solução de $\left(\frac{d}{dx}-a_j\right)^2 y=0$ é $y(x)=C_{j,1}\,e^{a_jx}+C_{j,2}x\,e^{a_jx}$. Aplicando indutivamente $\left(\frac{d}{dx}-a_j\right)u=0$ e $u=\left(\frac{d}{dx}-a_j\right)^k y$, obtemos a solução geral de $\left(\frac{d}{dx}-a_j\right)^{m_j}y=0$, $y(x)=\sum_{k=0}^{m_j-1}C_{j,k+1}x^k\,e^{a_jx}$.

Agora, consideremos os termos $\left[\left(\frac{d}{dx}-b_k\right)^2+c_k^2\right]^{r_k}$. O caso $r_k=1$ já foi tratado acima, onde calculamos a solução geral de $\left[\left(\frac{d}{dx}-b_k\right)^2+c_k^2\right]y=0$, $y(x)=D_{k,1}e^{b_kx}\operatorname{sen}(c_kx)+E_{k,1}e^{b_kx}\cos(c_kx)$. □

4.2. **Método dos coeficientes a determinar.** Substituição de expressões do tipo $p(x)e^{ax}\operatorname{sen}(bx)+q(x)e^{ax}\cos(bx)$, com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios de grau $m\geq 0$, em $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y$ resulta em uma expressão $b(x)$ do mesmo tipo. Isto sugere um procedimento simples para determinar uma solução particular de uma equação linear de coeficientes constantes, quando a expressão $b(x)$ for desta forma. Supomos que a solução particular seja desta forma, substituímos na equação e obtemos os coeficientes dos polinômios que fazem parte da mesma.

Observação 5. Precisamos determinar os graus dos polinômios envolvidos. Se as expressões $x^ie^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ e $x^ie^{ax}\cos(bx)$, $0\leq i\leq k$ forem soluções da equação homogênea $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$, então os polinômios da expressão $b(x)$ terão coeficientes iguais a zero nos monômios de graus maiores que $m-k$. Se o polinômio característico da equação possuir um fator da forma $(\lambda-a)^k$, então cada vez que aplicamos a transformação linear $(\frac{d}{dx}-a)$ à expressão x^me^{ax}, obtemos $mx^{m-1}e^{ax}$ (diminui o grau do polinômio em uma unidade). Se o polinômio característico possuir um fator da forma $[(\lambda-a)^2+b^2]^k$, então cada vez que aplicarmos a transformação $[(\frac{d}{dx}-a)^2+b^2]=[\frac{d^2}{dx^2}-2a\frac{d}{dx}+(a^2+b^2)]$ ao termo $x^me^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ (respectivamente, ao termo $x^me^{ax}\cos(bx)$), obtemos $m(m-1)x^{m-2}e^{ax}\operatorname{sen}(bx)+x^{m-1}[2m(e^{ax}\operatorname{sen}(bx))'-2ame^{ax}\operatorname{sen}(bx)]$ (respectivamente, $m(m-1)x^{m-2}e^{ax}\cos(bx)+x^{m-1}[2m(e^{ax}\cos(bx))'-2ame^{ax}\cos(bx)]$), ou seja, diminui o grau do polinômio em uma unidade. Por outro lado, se $x^ie^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ e $x^ie^{ax}\cos(bx)$, $0\leq i\leq k$ não forem soluções da equação homogênea, os graus dos polinômios serão os mesmos na expressão que resultar da substituição destes termos no lado esquerdo da equação.

Exemplo 18. A equação $y'''-3y''+3y'-y=0$ tem polinômio característico $(\lambda-1)^3$, com solução geral $y(x)=Ae^x+Bxe^x+Cx^2e^x$. A substituição $y(x)=x^{m+3}e^x$ na expressão do lado esquerdo da equação resulta em $y''' - 3y'' + 3y' - y = (m+3)(m+2)(m+1)x^m e^x$.

Isto sugere o *Método dos Coeficientes a Determinar* para obter uma solução particular da equação diferencial linear não homogênea a coeficientes constantes quando a função $b(x)$ for combinação linear de funções do tipo $p(x)e^{ax}\operatorname{sen}(bx)+q(x)e^{ax}\cos(bx)$, com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios de grau no máximo $m \geq 0$.

Teorema 5 (Método dos Coeficientes a Determinar)**.** Se a função $b(x)$ for combinação linear de funções do tipo $p(x)e^{ax}\operatorname{sen}(bx)+q(x)e^{ax}\cos(bx)$, com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios de grau no máximo $m \geq 0$, então uma solução particular $y_P(x)$ da equação $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ será uma combinação linear de funções do mesmo tipo.

Se $\lambda = a \pm b\sqrt{-1}$ for raiz de multiplicidade $k \geq 0$ do polinômio característico da equação, e $b(x)$ contiver um termo da forma $p(x)e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$, ou $p(x)e^{ax}\cos(bx)$, com o polinômio $p(x)$ de grau $m \geq 0$, então $y_P(x)$ conterá um termo $(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0)x^k e^{ax}\operatorname{sen}(bx) + (d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \cdots + d_1 x + d_0)x^k e^{ax}\cos(bx)$.

Demonstração. Se $b \neq 0$, substituição desta expressão no lado esquerdo da equação e a comparação do resultado com o termo correspondente de $b(x)$ produz um sistema linear determinado de $2m+2$ equações nas $2m+2$ incógnitas c_j e d_j, $0 \leq j \leq m$. Se $b = 0$, substituímos $b(x) = (d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \cdots + d_1 x + d_0)x^k e^{ax}$ e obtemos um sistema linear determinado de $m+1$ equações nas $m+1$ variáveis $d_0, \ldots, d_m$. $\square$

Exemplo 19 (Circuito RLC)**.** Um circuito elétrico RLC em série (com resistência $R \neq 0$ em Ohm, capacitância $C \neq 0$ em Faraday e indutância $L \neq 0$ em Henry), sujeito a uma fonte externa de tensão tem a carga $q = q(t)$ de seu capacitor regida pela equação

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{$*$}$$

O polinômio característico da equação homogênea associada (quando $E(t) = 0$) é $\lambda^2 + (R/L)\lambda + (1/LC)$, cujas raízes são

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Observe que $R/2L > \sqrt{(R/2L)^2 - (1/LC)}$. Se o termo dentro da raiz for positivo, então as raízes do polinômio característico serão ambas reais e negativas $-a = R/2L - \sqrt{(R/2L)^2 - (1/LC)}$ e $-b = R/2L + \sqrt{(R/2L)^2 - (1/LC)}$. A solução geral da equação homogênea será $q_0(t) = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt}$.

Suponhamos que o circuito seja excitado por uma tensão $E(t) = E_0\cos(\omega t)$. Uma resposta particular a essa excitação será da forma $q_1(t) = Q_1\operatorname{sen}(\omega t) + Q_2\cos(\omega t)$. Substituímos esta expressão na equação $(*)$

$$-L\omega^2[Q_1\operatorname{sen}(\omega t) + Q_2\cos(\omega t)] + R\omega[Q_1\cos(\omega t) - Q_2\operatorname{sen}(\omega t)] +$$

$$+\frac{1}{C}[Q_1 \operatorname{sen}(\omega t) + Q_2 \cos(\omega t)] = E_0 \cos(\omega t);$$

comparamos os dois lados desta equação e obtemos o sistema linear nas incógnitas Q_1 e Q_2

$$\begin{cases} (-L\omega^2 + 1/C)Q_1 - R\omega Q_2 & = & 0 & \text{(coeficiente de sen}(\omega t)) \\ R\omega Q_1 + (-L\omega^2 + 1/C)Q_2 & = & E_0 & \text{(coeficiente de cos}(\omega t)) \end{cases}$$

com solução

$$Q_1 = \frac{R\omega E_0}{\omega[R^2 + (-L\omega - 1/\omega C)^2]}$$

$$Q_2 = \frac{(-L\omega + (1/\omega C)\omega E_0}{\omega[R^2 + (-L\omega - 1/\omega C)^2]}$$

4.3. **Método da variação de parâmetros.** Se conhecermos um conjunto linearmente independente, $\{Y_1, \dots, Y_n\}$, de soluções do sistema linear homogêneo $Y' = A(x)Y$, podemos resolver a equação não homogênea $Y' = A(x)Y + B(x)$ pelo chamado método da variação de parâmetros, em que procuramos uma solução da forma $Y(x) = \sum_{j=1}^n C_j(x)Y_j(x)$, cujas incógnitas são funções escalares $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$. Vamos enunciar este resultado como um teorema, cuja demonstração descreve o uso do método e sua justificação.

Teorema 6. Seja $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ um conjunto linearmente independente de soluções (de classe C^1) do sistema de n equações de primeira ordem $Y' = A(x)Y$. Então existem funções escalares $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$, tais que $Y(x) = \sum_{j=1}^n C_j(x)Y_j(x)$ será solução do sistema não homogêneo $Y' = A(x)Y + B(x)$, em que $B(x)$ é uma função vetorial contínua.

Demonstração. Primeiramente, observe que a matriz $M = [Y_1 \dots Y_n]$, cujas colunas são as funções vetoriais Y_1, ..., Y_n, é invertível devido à condição de sua independência linear.

Substituímos a função $Y(x) = \sum_{j=1}^n C_j(x)Y_j(x)$ na equação $Y' = AY + B$:

$$(\sum_{j=1}^n C_j Y_j)' = \sum_{j=1}^n C_j y_j' + \sum_{j=1}^n C_j' Y_j = A(\sum_{j=1}^n C_j Y_j) + B,$$

e, dado que $Y_j' = AY_j$, desta equação sobra a equação $M\mathbf{C} = B$, em que $M = [Y_1 \dots Y_n]$ e $\mathbf{C}$ é a matriz de uma coluna $[C_1 \dots C_n]^t$ (transposta). A primeira observação acima indica que o sistema de primeira ordem (exato!) $\mathbf{C}' = M^{-1}B$ tem solução.

Isto resolve o problema. □

Isto também resolve equações lineares de ordem n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \qquad (*)$$

Teorema 7. Seja $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ um conjunto linearmente independente de soluções da equação homogênea associada a $(*)$. Então existem funções $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, tais que $y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x)$ resolve a equação $(*)$.

Demonstração. Basta usarmos o resultado anterior com o sistema de primeira ordem equivalente $Y = AY + B$, com

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{n-2} \\ Y_{n-1} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x)/a_n(x) \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_{n-1}/a_n & -a_{n-2}/a_n & -a_{n-3}/a_n & \ldots & -a_1/a_n & -a_0/a_n \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz M é chamada de **Wronskiano** da equação de ordem n e tem a forma

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Seu determinante é diferente de zero, pois as colunas são vetores linearmente independentes e, portanto, a matriz é invertível. □

Exemplo 20 (Equações Lineares de Primeira Ordem)**.** Resolvamos a equação

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Uma solução não trivial da equação homogênea associada, $p(x)y' + q(x)y = 0$, é

$$y_H(x) = \exp\left[-\int \frac{q(x)}{p(x)}\, dx\right]$$

Uma solução particular da equação não homogênea será $y_P(x) = C(x)y_H(x)$, e resolvemos a equação

$$p(x)[C(x)y_H(x)]' + q(x)[C(x)y_H(x)] = r(x)$$

ou, expandindo a derivada e simplificando, obtemos

$$p(x)y_H(x)C'(x) + C(x)\underbrace{[p(x)y_H'(x) + q(x)y_H(x)]}_{=0} = r(x)$$

Daí, temos uma solução não trivial

$$C(x) = \int \left[\frac{r(x)}{p(x)} \exp\left(\int \frac{q(x)}{p(x)} dx\right)\right] dx$$

e a solução particular procurada

$$y_P(x) = \exp\left[-\int \frac{q(x)}{p(x)}\,dx\right] \times \int \left[\frac{r(x)}{p(x)} \exp\left(\int \frac{q(x)}{p(x)} dx\right)\right] dx$$

Exemplo 21. O polinômio característico da equação homogênea associada à equação de segunda ordem $y''+y = \operatorname{tg} x$ é $p(\lambda) = \lambda^2+1$, com as raízes complexas $\lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$; a solução geral da equação homogênea associada é $y_H(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$. Usamos o método da variação de parâmetros para determinar uma solução particular $y_P(x) = c_1(x) \operatorname{sen} x + c_2(x) \cos x$:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix};$$

obtemos $c_1'(x) = \operatorname{sen} x$, ou $c_1(x) = -\cos x$, e $c_2'(x) = -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = -\sec x + \cos x$, ou $c_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$. A solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|.$$

4.4. **O Wronskiano.**

Definição 2 (Wronskiano)**.** Sejam $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(I)$ funções $n-1$ vezes continuamente diferenciáveis, definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Definimos o *Wronskiano* dessa n-upla de funções como o determinante

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Observação 6. O Wronskiano serve para verificar se n funções são linearmente independentes (sobre $\mathbb{R}$). Se existir algum ponto $x_0 \in I$, tal que $W(f_1, \dots, f_n)(x_0) \neq 0$, então as funções $f_1, \dots, f_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, sejam

$$f_j(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-j)^2} \cdot e^{-1/(x-j-1)^2} & \text{se} \quad j < x < j+1 \\ 0 & \textit{se} \quad x \leq j, \text{ ou } x \geq j+1 \end{cases}$$

para $j = 1, 2$. Essas funções estão em $C^\infty(\mathbb{R})$ e claramente são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. No entanto, $W(f_1, f_2)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Isso significa que se o Wronskiano se anular identicamente em um intervalo, não podemos concluir nada acerca da dependência ou independência linear das funções envolvidas.

Porém, existem casos em que a anulação do Wronskiano em todo ponto implicará que as funções são linearmente dependentes.

Teorema 8. Sejam $y_1(x), \dots, y_n(x)$ soluções da equação diferencial linear de ordem n em um intervalo I

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \qquad (*)$$

tais que $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$, para algum $x_0 \in I$. Neste caso, as funções $y_1(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ são linearmente dependentes.

Demonstração. Aqui entra em cheio a unicidade da solução de uma equação diferencial.

Suponhamos que $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$ e consideremos o sistema linear nas incógnitas c_1, $\dots$, c_n

$$\begin{array}{rcccrcl} y_1(x_0)c_1 & + & \dots & + & y_n(x_0)c_n & = & 0 \\ y_1'(x_0)c_1 & + & \dots & + & y_n'(x_0)c_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)c_1 & + & \dots & + & y_n^{(n-1)}(x_0)c_n & = & 0 \end{array}$$

cujo determinante da matriz dos coeficientes é $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$. Isso implica que o sistema linear possui uma solução $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$, em que pelo menos um dos C_j's não é zero.

A função $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x)$ é uma solução da equação diferencial $*$ acima, com as condições iniciais $y^{(k)}(x_0) = 0$, para $0 \leq k \leq n-1$. Como a solução identicamente nula também satisfaz essas condições iniciais, a unicidade das soluções implica que a função $y(x)$ é identicamente nula no intervalo I e, portanto, as funções $y_1(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ são linearmente dependentes. □

Existe um outro caso em que a anulação do Wronskiano implica a dependência linear das funções envolvidas.

Lembramos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é analítica em I se suas s'eries de Taylor em torno dos pontos $x_0 \in I$ têm raio de convergência não nulo e convergem para f em todo o intervalo de convergência.

Teorema 9. Suponha que as funções f_1, f_n sejam analíticas em um intervalo aberto I. Se $W(f_1, \dots, f_n)(x_0) = 0$, para todo $x_0 \in I$, então as funções f_1, $\dots$, f_n serão linearmente dependentes.

Demonstração. Consideramos apenas o caso em que $n = 2$ e que $x_0 = 0$, pois indica a ideia da demonstração e evita uma combinatória mais complicada.

Sejam $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Daí, $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n$, e

$$W(f, g)(x) = fg'(x) - f'g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

onde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(k+1) b_{k+1} a_{n-k} - (k+1) a_{k+1} b_{n-k}\right]$$

A função $W(f_1, f_2)(x)$ é analítica em I e é identicamente nula nesse intervalo e, assim, a unicidade da série de Taylor dessa função implica que $c_n = 0$, para todo $n \geq 0$.

Mostremos que f e g são linearmente dependentes. Podemos supor que a função f não é identicamente nula, e mostraremos que existirá $\lambda \in \mathbb{R}$,tal que $g = \lambda f$.

Para $n = 0$, temos $c_0 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$. Temos que considerar dois casos: $a_0 = a_1 = 0$, ou pelo menos um desses números é diferente de zero. Vamos supor que $a_0 \neq 0$ e os outros casos ficam como exercício. Observe que

$$c_0 = \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = 0,$$

o que implica que os vetores $(a_0, a_1), (b_0, b_1) \in \mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes e, portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $(b_0, b_1) = \lambda(a_0, a_1)$.

O passo de indução parte da hipótese que $b_j = \lambda a_j$, para $0 \leq j \leq n$ e deve chegar à conclusão que $b_{n+1} = \lambda a_{n+1}$. Temos que

$$0 = c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(k+1)b_{k+1}a_{n-k} - (k+1)a_{k+1}b_{n-k}] =$$

$$= (n+1)b_{n+1}a_0 - (n+1)b_0a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{\lambda(k+1)[a_{k+1}a_{n-k} - a_{k+1}a_{n-k}]}_{\text{Hipótese de Indução}} =$$

$$= (n+1)a_0[b_{n+1} - \lambda a_{n+1}]$$

Como estamos assumindo $a_0 \neq 0$, concluímos que $b_{n+1} = \lambda a_{n+1}$.

Pelo Princípio da Indução Finita, temos que $g = \lambda f$. □

Exercício 1. Analise o caso em que $a_0 = \cdots = a_{n_0} = 0$ e $a_{n_0+1} \neq 0$.

O resultado a seguir mostra como calcular o Wronskiano de uma sequância de soluções linearmente independente de soluções de uma equaçãon diferencial linear, mesmo sem conhecê-las.

Teorema 10 (Fórmula de Abel)**.** Sejam $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ soluções linearmente independentes da equação $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Então existe $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, tal que

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = c\, e^{-\int a_{n-1}(x)\,dx}$$

Demonstração. A estratégia é derivar o Wronskiano, $W'(y_1, \ldots, y_n)(x)$ e chegar a uma equação de primeira ordem da forma $W' = -a_{n-1}(x)W(x)$, cuja solução ser'a a desejada.

Observe que $W' = \sum_{i=1}^{n} W_j$, onde W_j é o determinante da matriz em que derivamos a linha j da matriz usada para o Wronskiano, donde segue que $W_j = 0$, se $1 \leq j \leq n-1$ (pois haverá sempre duas linhas iguais), e usamomos a equação diferencial para substituir as n-ésimas derivadas da última linha de W_n. Faremos explicitamente o caso $n = 2$ que é mais fácil de visualizar o método.

A equação será $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, com soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente independentes.

$$W'(y_1, y_2)(x) = \frac{d}{dx}\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)y_1' - a_0(x)y_1 & -a_1(x)y_2' - a_0(x)y_2 \end{pmatrix} = -a_1(x)W(y_1, y_2)(x)$$

A solução geral da equação $W' = -a_1(x)W$ é

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = c\, e^{-\int a_{n-1}(x)\,dx}$$

e a constante c depende das condições iniciais da equação de segunda ordem, ou seja,

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = W(y_1, y_2)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,dt}$$

O caso de ordem n qualquer é análogo. $\square$

5. Equações lineares de segunda ordem

Nesta seção tratamos de EDOs de segunda ordem lineares

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \qquad (*),$$

com sua equação homogênea associada

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (\dagger).$$

Não existe um método geral para resolvê-las (mas veja a seção sobre resolução por séries), porém vários casos particulares são passíveis de soluções explícitas.

5.1. **Redução de Ordem.**
O matemático italiano Jacopo Riccati (1676-1754) obteve em [9] um método de redução de ordem de uma equação linear homogênea de segunda ordem a uma equação (não linear) de primeira ordem, o que pode facilitar sua resolução. A equação de primeira ordem obtida hoje leva seu nome.

Exemplo 22 (Equação de Riccati)**.** Estas são equações da forma

$$v' + a_2(x)v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0 \qquad (\ddagger)$$

em que $a_2(x)$ não é identicamente nula e $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $a_2(x)$ são funções contínuas (em um intervalo I).

Propriedades:

(a) vale o Teorema de Existência e Unicidade para esta equação;

(b) se $v_1(x)$ for uma solução particular da equação (‡), então a substituição $v = v_1 + 1/w$ transforma esta equação em uma equação linear de primeira ordem $y_1' - w'/w^2 + a_2(x)[y_1 + 1/w]^2 + a_1(x)[y_1 + 1/w] + a_0(x) = -w'/w^2 + [2a_2(x)y_1(x) + a_1(x)]/w + a_2(x)/w^2] = 0$, ou

$$w' - [2a_2(x)y_1(x) + a_1(x)]w + a_2(x) = 0,$$

cuja solução geral é

(c) sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções distintas da equação (‡); consideremos a expressão

$$\frac{d}{dx}\log\left[\frac{y-y_1}{y-y_2}\right] = \frac{y'-y_1'}{y-y_1} - \frac{y'-y_2'}{y-y_2};$$

substituímos $y = -a_2(x)y^2 - a_1(x)y - a_0(x)$ (o mesmo para y_1' e y_2'), e o lado direito da equação acima torna-se $a_2(x)(y_2 - y_1)$; igualamos primitivas de ambos os lados e obtemos uma expressão para as outras soluções da equação de Riccati

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y(x)-y_2(x)} = C\exp\left[\int a_2(x)[y_2(x)-y_1(x)]\,dx\right];$$

(d) do item anterior deduzimos que se $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ forem três soluções distintas da equação (‡), então a solução geral da equação de Riccati é

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y(x)-y_2(x)} \cdot \frac{y_3(x)-y_2(x)}{y_3(x)-y_1(x)} = C;$$

(e) suponha que a_0, a_1 e a_2 sejam constantes; então as raízes (reais) de $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ provêm soluções constantes da equação (‡).

Equações lineares de segunda ordem podem ser transformadas em equações de Riccati pela mudança de variáveis $v = y'/y$.

Exemplo 23 (Equação linear homogênea com coeficientes constantes)**.** A mudança de variáveis $v = y'/y$ transforma a equação linear homogênea de segunda ordem $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ na equação de Riccati $v' + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$. Assim, para resolver a primeira equação, resolvemos a segunda e depois resolvemos a equação linear de primeira ordem $y'(x) = v(x)y(x)$.

Vamos resolver com esse método as equações lineares $y'' - (r+s)y' + rsy = 0$ e $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.

Exemplo 24 (Resolução da equação $y'' - (r+s)y' + rsy = 0$, com $r \neq s$)**.** Já temos duas soluções particulares constantes distintas $y_1(x) = r$ e $y_2(x) = s$ da equação de Riccati $v' + v^2 - (r+s)v + rs = 0$. A solução geral (não constante) desta equação é

$$\frac{v-r}{v-s} = C\,e^{(s-r)x}, \quad \text{ou} \quad v(x) = \frac{r - sC\,e^{(s-r)x}}{1 - C\,e^{(s-r)x}} = \frac{r\,e^{rx} - sC\,e^{sx}}{e^{rx} - C\,e^{sx}}.$$

Resolvemos a equação linear de primeira ordem $y' = vy$, para chegarmos à solução da equação original. Esta equação pode ser reescrita assim:

$$\frac{d}{dx}\ln|y| = \frac{y'}{y} = \frac{r\,e^{rx} - sC\,e^{sx}}{e^{rx} - C\,e^{sx}} = \frac{d}{dx}\ln|e^{rx} - C\,e^{sx}|,$$

cuja solução geral é $y(x) = K[e^{rx} - C\, e^{sx}] = C_1 e^{rx} + C_2\, e^{sx}$.

Exemplo 25 (Resolução da equação $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$)**.** A equação de Riccati associada é $v' + v^2 - 2av + (a^2 + b^2) = 0$. O polinômio $v^2 - 2av + (a^2 + b^2)$ não tem raízes reais e, portanto nunca se anula. Assim, podemos resolver esta equação pelo método de separação de variáveis

$$\frac{v'}{v^2 - 2av + (a^2 + b^2)} = -1 \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{v^2 - 2av + (a^2 + b^2)} dv = -x + C;$$

a integral do lado esquerdo resulta em $\frac{1}{b}\operatorname{arctg}(\frac{v-a}{b})$ e, daí, $v(x) = a + \operatorname{tg}(-bx + C)$; voltamos para $y' = vy$, ou $\frac{y'}{y} = v$, e obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln|y| = \frac{y'}{y} = v(x) = -\frac{\operatorname{sen}(bx - C)}{\cos(bx - C)} = a + \frac{d}{dx} \ln|\cos(bx - C);$$

ou seja, $y(x) = K\, e^{ax} \cos(bx - C) = C_1\, e^{ax} \operatorname{sen}(bx) + C_2\, e^{ax} \cos(bx)$.

Exemplo 26 (Resolução da equação $y'' - 2ry' + r^2 y = 0$)**.** Agora temos apenas uma solução constante $v(x) = r$ da equação de Riccati associada $v' + v^2 - 2rv + r^2 = 0$, a qual produz a solução $y(x) = C\, e^{rx}$.

Observação 7. Se conhecermos uma solução $y_1(x)$ não nula da equação homogênea $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, podemos resolver a equação (não necessariamente homogênea) $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ com a substituição $y(x) = v(x)y_1(x)$. Fazemos $y' = v'y_1 + vy_1'$, $y'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ e substituímos em $(*)$, ficando com a equação linear de primeira ordem

$$a_2(x)y_1(x)v'' + [2a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1'(x)]v' = b(x),$$

pois o termo que falta, $[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]v$, anula-se devido a $y_1(x)$ ser solução da equação homogênea.

Esta é uma equação linear de primeira ordem em v'.

Exemplo 27. Voltemos ao exemplo anterior. Já conhecemos uma solução $y_1(x) = e^{rx}$ da equação $y'' - 2ry' + r^2 y = 0$. A substituição $y = vy_1 = e^{rx}v$ reduz esta equação a $e^{rx}v'' = 0$, cuja solução geral é $v(x) = C_1 + C_2 x$ e, portanto, $y(x) = C_1\, e^{rx} + C_2 x\, e^{rx}$.

6. Resolução por Séries e Método de Frobenius

Em muitas aplicações em física e em engenharia, as equações diferenciais admitem soluções em séries de Taylor. Vamos examinar alguns casos práticos aqui, restringindo o enfoque às equações diferenciais lineares (principalmente com coeficientes variáveis).

Definição 3 (Funções Analíticas)**.** Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. A função f será analítica se sua série de Taylor em torno de cada $x_0 \in I$ convergir para f em seu intervalo de convergência.

Exemplo 28. As funções elementares já conhecidas, exponencial, trigonométricas, logarítmicas, etc, são analíticas em em seus domínios. Composições de funções analíticas são analíticas.

A demonstração do teorema abaixo fornece um método prático para a obtenção das soluções analíticas de uma equação diferencial linear, principalmente se os seus coeficientes não forem constantes.

Teorema 11 (Soluções Analíticas de Equações Diferenciais Lineares)**.** Suponha que as funções $a_k(x)$, $0 \le k \le N-1$, e $g(x)$ sejam analíticas em um domínio comum, um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Dado um ponto $x_0 \in I$, seja $R > 0$ o menor raio de convergência das séries de Taylor em torno de x_0 das funções $a_k(x)$ e $g(x)$. Dadas as condições iniciais $y^{(k)}(x_0) = y_k$, $0 \le k \le N-1$, existe uma única solução da equação

$$y^{(N)} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x) y^{(k)} = g(x),$$

que será analítica, cuja série de Taylor em torno de x_0 será convergente se $|x - x_0| < R$.

Demonstração. Por conveniência de exposição, consideramos o caso $N = 2$ e $x_0 = 0$, que já é bastante útil nas aplicações.

Para evitarmos muitos índices, escrevemos a equação como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

com $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$, que convergem se $|x| < R$, e escrevemos $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$.

Substituímos na equação diferencial e obtemos a sequência de equações (lineares nas incógnitas a_n), da que separamos a primeira para indicar o uso de condições iniciais $a_0 = y(0)$ e $a_1 = y'(0)$

$$2a_2 + p_0 a_1 + q_0 a_0 = g_0$$

Essa equação faz parte da sequência

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} [(k+1)a_{k+1} p_{n-k} + a_k q_{n-k}] = g_n, \; n \ge 0.$$

Observe que cada uma dessas equações permite obter cada a_n, $n \ge 2$, a partir dos valores a_0, a_1 e g_n dados, e dos a_k, $2 \le k \le n-1$.

Resta mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, se $|x| < R$. Para isso, consulte [2, Theorem 5.9, pp. 136–138; Theorem 5.11, pp. 140–141]. □

6.1. **Singularidades Regulares.** Vamos resolver agora equações diferenciais lineares de segunda ordem $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, em que os coeficientes sejam polinômios, ou mais geralmente, funções analíticas, em torno de pontos x_0 que anulem o coeficiente $a_2(x)$.

Definição 4 (Pontos Singulares Regulares)**.** O ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é um *ponto singular* (ou *singularidade*) da equação linear de segunda ordem com coeficientes analíticos

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, se $a_2(x_0) = 0$. Esse ponto será uma *singularidade regular* se $a_2(x) = (x - x_0)^2 b(x)$, com $b(x)$ analítica em torno de x_0 e $b(x_0) \neq 0$.

Vamos apresentar o Método de Frobenius para resolver essas equa cões, e começamos com um exemplo importante.

Exemplo 29 (Equação de Euler de Ordem n)**.** A equação

$$x^n y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j y^{(j)} = 0$$

é uma generalização da equação de Euler de ordem 2.

Procuramos soluções com $x > 0$ e chamamos $x = e^t$ e $z(t) = y(e^t)$. Aplicamos a regra da cadeia $dz/dt = (dy/dx)(dx/dt) = e^t(dy/dz)$, ou seja, $dy/dx = e^{-t}(dz/dt)$, e derivando várias vezes, obtemos

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} - k + 1\right) z$$

Substituímos na equação de Euler acima e chegamos a uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes em z, com derivadas em relação à variável t. Seu polinômio característico é chamado de *polinômio indicial* da equação de Euler.

As soluções são combinações lineares de funções do tipo $t^i e^{\lambda t}$, que se voltarmos à variável x, teremos as soluções da equação de Euler como combinações lineares de funções do tipo $x^\lambda (\ln x)^i$, se $\lambda \in \mathbb{R}$, ou $x^a (\ln x)^i (\cos(b \ln x) + i\,\mathrm{sen}(b \ln x))$, se $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$.

Exercício 2. Mostre que se no exemplo acima testarmos uma solução $y(x) = x^r$, com o expoente r a ser determinado, chegamos a um polinômio em r que é o oplinômio indicial da equação, tal como definido no exemplo acima.

Exemplo 30 (Equação de Euler de Ordem 2)**.** A equação de Euler

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

ilustra bem o modo de solução de equações diferenciais lineares com singularidades regulares. Além de seu interesse teórico, tem aplicações em soluções de equações diferenciais parciais que descrevem valores de ativos financeiros (veja, por exemplo, [7]).

Essa é uma equação de segunda ordem e, portanto, possui duas soluções linearmente independentes, pelo menos para $x > 0$ (para $x < 0$, também, mas temos que tomar um certo cuidado). Consideremos primeiramente a busca de soluções no intervalo $x > 0$.

Observemos que se $y(x) = x^r = e^{r \ln x}$, para $r \in \mathbb{R}$, então $y'(x) = rx^{r-1}$ e $y'' = r(r-1)x^{r-2}$. Substituindo na equação acima, temos

$$[r(r-1) + ar + b]x^r = 0,$$

o que implica que deveremos ter $r(r-1)+ar+b=0$, ou $r^2+(a-1)r+b=0$, cujas raízes são

$$r=\frac{1-a\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$$

Podemos ter duas raízes reais distintas, ou um raiz real dupla, ou duas raízes complexas, uma a conjugada da outra.

(Caso 1: raízes reais distintas) Examinemos primeiramente o caso mais simples, que é aquele das raízes reais distintas, r_1 e r_2. As funções x^{r_1} e x^{r_2} são linearmente independentes e, portanto, obtemos a solução geral $y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$.

(Caso 2: raiz real dupla) Se aquele polinômio possuir apenas uma raiz dupla, $r_1=r_2=r=(1-a)/2=\sqrt{b})$, obtemos apenas a solução particular $y=c_0x^r$.

Para obtermos uma segunda, podemos fazer a redução de ordem, buscando uma solução da forma $y(x)=v(x)x^r$. Substituímos na equação e temos

$$x^2(x^rv''+2rx^{r-1}v'+r(r-1)x^{r-2}v)+a(x^rv'+rx^{r-1}v)+bx^rv=$$
$$=x^{r+2}v''+(a+2r)x^{r+1}v'+\underbrace{[x^2(r(r-1)x^{r-2})+ax(rx^{r-1})+bx^r]}_{=0}v=0$$

Assim, temos que resolver a equação linear de primeira ordem em v' (com a simplificação $a+2r=1$)

$$xv''+v'=0,$$

que tem a solução particular é $v'=1/x$ e $v=c\ln x+d$. Uma solução particular é $v=\ln x$ e a solução geral da equação de Euler nesse caso será $y(x)=c_0x^r+c_1x^r\ln x$.

(Caso 3: raízes complexas) Se as raízes forem complexas, $r=\alpha\pm i\beta$, com $\beta=\sqrt{|(a-1)^2-4b^2|}\neq 0$, usaremos a definição de $x^r=e^{r\ln x}$ para obtermos as soluções

$$y(x)=e^{(\alpha\pm i\beta)\ln x}=e^{\alpha\ln x}[\cos(\beta\ln x)\pm i\,\mathrm{sen}(\beta\ln x)]$$

A solução geral neste caso será a parte real de $(C-iD)y_1(x)$, que será

$$y(x)=C\,x^\alpha\cos(\beta\ln x)+D\,x^\alpha\,\mathrm{sen}(\beta\ln x).$$

6.2. **O Método de Frobenius.** Tratamos agora de equações do tipo

$$x^ny^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}x^ka_k(x)y^{(k)}=b(x)$$

onde $a_k(x)$ é analítica em torno de $x_0=0$, com $a_k(0)\neq 0$, $0\leq k\leq n-1$.

A deduç ao do método está contida nos próximos exemplos.

Exemplo 31 (Primeira Ordem)**.** Vamos começar com equações de primeira ordem, $n=1$,

$$xy'+a(x)y=0,$$

que tem solução $y(x)=\exp\left(-\int x^{-1}a(x)\,dx\right)$.

Se escrevermos $a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, então a solução tem a forma

$$y(x) = \exp \int \left(\frac{-a_0}{x} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k \right) dx = x^{-a_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{a}_k}{k} x^k$$

onde usamos que a exponencial de uma função analítica também é analítica,

$$\exp \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k/k) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k x^k$$

Exemplo 32 (O Polinômio Indicial)**.** Agora estudamos uma equação de ordem n qualquer

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + x p_1(x) y' + p_0(x) y = 0$$

com coeficientes $p_0(x)$, …, $p_{n-1}(x)$ analíticos em torno de $x_0 = 0$.

O exemplo da equação de primeira ordem sugere que possamos buscar uma solução da forma

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

não nula, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou em $\mathbb{C}$) a ser determinado. Assumimos que o coeficiente $c_0 \neq 0$.

Substituímos essa expressão na equação e igualamos a zero os coeficientes de cada monômio da forma $a_k x^{k+\lambda}$.

Observe que se substuirmos $y = x^{\lambda+k}$ na equação, obteremos o termo $x^{\lambda+k} f(x, \lambda = k)$, onde $f(x, \lambda + k)$ representa a série

$$f(x, \lambda + k) = [lambda + k]_n + \sum_{j=0}^{k-1} [lambda + k]_{k-j} p_j(x)$$

em que $[\beta]_i$ representa a expressão $[\beta]_0 = 1$ e $\beta_{i+1} = [\beta_i](\beta - i)$, ou seja, se $i > 0$,

$$[\lambda + k]_i = (\lambda + k)(\lambda + k - 1) \ldots (\lambda + k - i + 1)$$

Escrevemos a série $f(x, \lambda + k) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\lambda + k) x^j$, substituímos tudo na equação e com isso, obtemos uma sequência de equações

$$\sum_{i=0}^{k} c_{k-i} f_i(\lambda + k - i) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como assumimos que $c_0 \neq 0$, a primeira dessas equações implica que $f_0(\lambda) = 0$, ou seja,

$$[\lambda]_n + [\lambda]_{n-1} p_{n-1}(0) + \cdots + \lambda p_1(0) + p_0(0) = 0$$

O lado esquerdo dessa igualdade é um polinômio de grau n em λ, chamado de *polinômio indicial* da equação diferencial, e suas raízes fornecem as possíveis potências

x^λ que multiplicam as séries de potências para obtermos uma solução da equação diferencial.

Observe que esse polinômio indicial é o mesmo da equação de Euler

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} p_{n-1}(0) y^{(n-1)} + \cdots + x p_1(0) y' + p_0(0) y = 0$$

Exemplo 33 (A Equação de Bessel-Parte I)**.** A equação de Bessel é a equação de ordem 2

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \rho^2) y = 0$$

que depende de um parâmetro real ρ.

Podemos escrever essa equação como $x^2 y'' + x p_1(x) y' + p_0(x) y = 0$, com $p_1(x) = 1$ e $p_0(x) = x^2 - \rho^2$. Seu polinômio indicial é

$$I(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda - \rho^2 = \lambda^2 - \rho^2,$$

cujas raízes são $\pm\rho$.

Escolhemos a raiz $\rho \geq 0$ e substituímos $y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ na equação de Bessel e obtemos a sequência de equações

$$(2\rho + 1) a_1 = 0$$

o que implica que $a_1 = 0$, e para $k \geq 2$,

$$k(k + 2\rho) a_k + a_{k-2} = 0$$

Daí, obtemos a relação de recorrência

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k + 2\rho)}, \; k \geq 2$$

Como $a_1 = 0$, essa relação implica que $a_{2n+1} = 0$, para todo $n \geq 0$. Para os índices pares, escrevemos $k = 2n$ e obtemos

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{a_0}{n!(\rho + 1)(\rho + 2) \ldots (\rho + n)}$$

Uma das soluções da equação de Bessel é

$$J_\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{a_0}{n!(\rho + 1)(\rho + 2) \ldots (\rho + n)} x^{\rho + 2n}$$

Mais adiante escolhemos o valor de a_0.

Se $\rho - (-\rho) = 2\rho \notin \mathbb{N}$, então a segunda solução será

$$J_{-\rho}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{a_0}{n!(1 - \rho)(2 - \rho) \ldots (n - \rho)} x^{-\rho + 2n}$$

e o par de funções $J_\rho(x)$ e $J_{-\rho}(x)$ forma um conjunto linearmente independente de soluções da equação de Bessel.

Os casos em que $2\rho \in \mathbb{N}$ são tratados mais adiante.

Exemplo 34 (O Método de Frobenius - I)**.** Consideremos uma equação de ordem $n \geq 1$

$$x^n y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} x^j P_j(x) y^{(j)} = 0$$

Vamos tentar uma solução do tipo

$$W(x,\rho) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k}$$

Substituímos $y = W(x,\rho)$ na equação diferencial e obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k f(x,\rho+k) x^{\rho+k} = 0$$

onde

$$f(x,\rho+k) = [\rho+k]_n + \sum_{j=0}^{n-1} [\rho+k]_j P_{n-j-1}(x),$$

com a notação $[\alpha]_0 = 1$ e $[\alpha]_{m+1} = [\alpha]_m(\alpha - m + 1)$, ou seja, se $m > 0$,

$$[\alpha]_m = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m+1)$$

As funções $P_j(x)$ são analíticas, ou seja, elas são representadas por séries de Taylor convergentes em um intervalo comum $|x| < R$, para algum $R > 0$. Assim, podemos escrever $f(x,\rho+k) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\rho+k)x^i$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k f(x,\rho+k) x^{\rho+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} c_j f_{k-j}(\rho+k+j) \right) x^{\rho+k}$$

Observe que se escrevermos $P_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_j^{(m)}(0) x^m/m!$, então

$$f_0(\rho) = [\rho]_n + \sum_{j=0}^{n-1} [\rho]_j P_{n-j-1}(0)$$

que é o *polinômio indicial* da equação diferencial, e se $i > 0$,

$$f_i(\rho) = \sum_{j=0}^{n-1} [\rho]_j P_{n-j-1}^{(i)}(0)$$

Escolhemos $c_0 \neq 0$ de modo conveniente (isso ficará claro a seguir) e obtemos os coeficientes c_k, $k \geq 1$, resolvendo a sequência de sistemas lineares, com matrizes de coeficientes triangular superior,

$$\begin{pmatrix} f_0(\rho+k) & f_1(\rho+k-1) & f_2(\rho+k-2) & \dots & f_{k-1}(\rho+1) \\ 0 & f_0(\rho+k-1) & f_1(\rho+k-2) & \dots & f_{k-2}(\rho+1) \\ 0 & 0 & f_0(\rho+k-2) & \dots & f_{k-3}(\rho+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_0(\rho+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} =$$

$$= -c_0 \begin{pmatrix} f_k(\rho) \\ f_{k-1}(\rho) \\ f_{k-2}(\rho) \\ \vdots \\ f_1(\rho) \end{pmatrix}$$

O determinante dessa matriz de coeficientes é o produto dos elementos da diagonal,

$$f_0(\rho+k)f_0(\rho+k-1)\dots f_0(\rho+1)$$

e o método de Cramer para resolver o sistema acima e obtemos

$$c_k = \frac{(-1)^k F_k(\rho)}{f_0(\rho+k)f_0(\rho+k-1)\dots f_0(\rho+1)} c_0$$

onde

$$F_k(\rho) = \det \begin{pmatrix} f_1(\rho+k-1) & f_2(\rho+k-2) & \dots & f_{k-1}(\rho+1) & f_k(\rho) \\ f_0(\rho+k-1) & f_1(\rho+k-2) & \dots & f_{k-2}(\rho+1) & f_{k-1}(\rho) \\ 0 & f_0(\rho+k-2) & \dots & f_{k-3}(\rho+1) & f_{k-2}(\rho) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_0(\rho+1) & f_1(\rho) \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix} f_k(\rho) & f_1(\rho+k-1) & f_2(\rho+k-2) & \dots & f_{k-1}(\rho+1) \\ f_{k-1}(\rho) & f_0(\rho+k-1) & f_1(\rho+k-2) & \dots & f_{k-2}(\rho+1) \\ f_{k-2}(\rho) & 0 & f_0(\rho+k-2) & \dots & f_{k-3}(\rho+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\rho) & 0 & 0 & \dots & f_0(\rho+1) \end{pmatrix}$$

Isso resolve completamente os casos em que as raízes do polinômio indicial forem dois a dois distintos e a diferença entre duas dessas raízes não for um número inteiro.

A escolha conveniente de c_0 permite evitar os casos em que o determinante da matriz dos coeficientes acima seja não nulo.

Isso vai ficar mais claro no próximo exemplo.

Exemplo 35 (Método de Frobenius - II)**.** Para fazer sentido o que vamos fazer, consideremos novamente uma função $W(x,\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k}$ como uma função de duas variáveis, x real e ρ complexa, esta última para ser depois restrita às raízes do polinômio indicial da equação diferencial. Continuamos com as notações do exemplo anterior.

Dentre as raízes do polinômio indicial, listemos um conjunto $\rho_0,\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_{j_0}$, de modo que se $0 \leq r < s \leq j_0$, então $\rho_r - \rho_s \in \mathbb{N}$.

Para evitarmos zeros nos denominadores, escolhemos

$$c_0 = c_0(\rho) = C_0 f_0(\rho + r_0) f_0(\rho + r_0 - 1) \ldots f_0(\rho + 1),$$

com $C_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário (que será determinado pelas condições iniciais da equação diferencial), e $r_0 = \rho_0 - \rho_{j_0}$.

Dessa forma, os termos do denominador da expressão dos c_k $(k \geq 1)$ que pudessem ser anulados são cancelados.

Pode-se mostrar que a série que define $W(x, \rho)$, como função de duas variáveis converge se $|x| < R$ e em uma vizinhança (um disco no plano complexo $\mathbb{C}$) em torno de cada raiz do polinômio indicial. Em particular, converge uniformemente em cada disco fechado em torno dessas raízes. Isso implica que podemos derivar a série termo a termo para derivar a função $W(x, \rho)$

$$\frac{\partial^m W}{\partial \rho^m}(x, \rho) = \frac{\partial^m}{\partial \rho^m}\left[x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho) x^k\right] = x^\rho \left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (\ln x)^j \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(m-j)}(\rho) x^k\right] \qquad (\dagger)$$

(lembre-se que $x^\rho = e^{\rho \ln x}$).

Como a função $W(x, \rho)$ é analítica, ela é de classe C^∞ e, portanto, valem as igualdades

$$\frac{\partial^{m+p} W}{\partial x^m \partial \rho^p} = \frac{\partial^{m+p} W}{\partial \rho^p \partial x^m}.$$

Digamos que $\rho_0 = \rho_1 = \cdots = \rho_{g_0} \neq \rho_{g_0+1}$ nessa lista. Usamos as definições dos coeficientes c_k $(k \geq 1)$ e substituímos a função $W(x, \rho)$ na equação diferencial e obtemos

$$x^n \frac{\partial^n W}{\partial x^n}(x, \rho) + \sum_{j=0}^{n-1} x^k P_k(x) \frac{\partial^k W}{\partial x^k}(x, \rho) = c_0 f_0(\rho) x^\rho =$$

$$= C_0 f_0(\rho + r_0) f_0(\rho + r_0 - 1) \ldots f_0(\rho + 1) f_0(\rho) x^\rho = C_0 F(\rho) x^\rho \qquad (*)$$

Observe que o termo $F(\rho)$ na expressão $(*)$ é polinomial na variável ρ. O fator $(\rho - \rho_0)$ desse polinomial tem grau g_0. Daí,

$$\frac{\partial^m}{\partial \rho^m}\left[x^n \frac{\partial^n W}{\partial x^n} + \sum_{j=0}^{n-1} x^j P_j(x) \frac{\partial^j W}{\partial x^j}\right]_{\rho=\rho_0} = C_0 \frac{\partial^m}{\partial \rho^m} F(\rho) x^\rho \bigg|_{\rho=\rho_0} =$$

$$= x^{\rho_0}\left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (\ln x)^j \frac{\partial^{m-j} F}{\partial \rho^{m-j}}\right]_{\rho=\rho_0} = 0,$$

se $m = 0, \ldots, g_0 - 1$. Essa expressão pode não se anular se $m = g_0$.

Assim, obtemos g soluções claramente linearmente independentes correspondentes à raiz ρ_0 de multiplicidade g_0 do polinômio indicial

$$W_m(x,\rho_0) = x^{\rho_0}\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(\ln x)^j\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(m-j)}(\rho_0)x^k\right]$$

para $m = 0,\ldots,g_0-1$. A função $W_0(x,\rho_0)$ é a única dessa lista que não contém logaritmos.

Consideremos agora uma segunda raiz de multiplicidade g_1, $\rho_1 = \rho_0 - N$, onde $N\in\mathbb{N}$, $N\neq 0$.

A expressão dos coeficientes

$$c_k(\rho) = \frac{(-1)^k F_k(\rho)}{f_0(\rho+k)f_0(\rho+k-1)\ldots f_0(\rho+1)}c_0 =$$
$$= C_0\frac{(-1)^k F_k(\rho)f_0(\rho+r_0)f_0(\rho+r_0-1)\ldots f_0(\rho+1)}{f_0(\rho+k)f_0(\rho+k-1)\ldots f_0(\rho+1)}$$

no exemplo anterior mostra que $c_0(\rho_1) = \cdots = c_{N-1}(\rho_1) = 0$, pois $N \leq r_0$. O fator $f_0(\rho+N)$ do numerador, que se anula se $\rho=\rho_1$, é cancelado pelo mesmo fator no denominador somente se $k\geq N$, pois $\rho_0 = \rho_1+N$ é uma das raízes do polinômio indicial $f_0(\rho)$.

Com isso, as g_1 novas soluções linearmente independentes das anteriores são

$$W_m(x,\rho_1) = \frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left[x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho)x^k\right]_{\rho=\rho_1} = x^{\rho_1}\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(\ln x)^j\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(m-j)}(\rho_1)x^k\right]$$

para $m = g_0,\ldots,g_1-1$.

Com este procedimento obtemos um conjunto máximo linearmente independente de soluções da equação diferencial.

Observação 8. Se R for o menor dos raios de convergência das séries de potências $P_j(x)$, $j=0,\ldots,n-1$, então a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ convergirá (absolutamente) se $|x|<R$ (veja [5, § 16.2, pp. 398–399]).

Exemplo 36 (A Função Gama)**.** Para podermos definir totalmente as funções de Bessel, precisamos definir a função Γ e mostrar algumas propriedades.

A integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-t+(x-1)\ln t}\,dt$$

é convergente se $x>0$ e define uma função analítica nesse intervalo. Essa integral diverge para $+\infty$ se $x=0$.

Integramos por partes ($u(t)=t^x$, $v'(t)=e^{-t}$) e obtemos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt = \underbrace{\left[-t^xe^{-t}\right]_0^{\infty}}_{=0} + x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$

Observe que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

e, portanto, se $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

A fórmula $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ permite estendermos a função Γ para $x < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$. Por exemplo, $\Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2)$.

Essa fórmula também implica

$$\Gamma(a+n) = \Gamma(a)a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$$

se $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Exemplo 37 (A Equação de Bessel - Parte II)**.** A equação de Bessel é $x^2y'' + xy' + (x^2 - \rho^2)y = 0$, cujo polinômio indicial é $\lambda^2 - \rho^2$ Uma das soluções da equaçõ é

$$J_\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{a_0}{n!(\rho+1)(\rho+2)\dots(\rho+n)} x^{\rho+2n}$$

e a escolha tradicional da constante a_0, para $\rho \geq 0$, é $a_0 = 1/2^\rho\Gamma(\rho+1)$, ou seja,

$$J_\rho(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\rho+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Se $\rho \notin \mathbb{N}$, então a segunda solução $J_{-\rho}(x)$ é uma segunda solução independente da primeira, mesmo que sua diferença, $2\rho = \rho - (-\rho)$, seja um número inteiro (e a verificação dessa afirmação fica como exercício).

Tratamos nesse exemplo do **caso $\boldsymbol{N = 0}$**.

Como $\Gamma(n+1) = n!$, temos

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Como $N = 0$ é raiz dupla do polinômio indicial, uma segunda solução é

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\rho+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]_{\rho=0} =$$

$$= J_0(x)\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\Gamma'(n+1)}{n![\Gamma(n+1)]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Chamamos $\Gamma'(1) = \gamma$ (esta constante é conhecida como constante de Euler, ou constante de Euler-Mascheroni), então deduzimos da igualdade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ que

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}_{H_n} - \gamma = H_n - \gamma$$

Com isso, podemos escrever essa segunda solução como

$$J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}(H_n - \gamma)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = K_0(x) - \gamma J_0(x)$$

e podemos tomar a função

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} H_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

(que é mais famosa) como segunda solução.

Exemplo 38 (A Equação de Bessel - Parte III)**.** Tratamos agora dos casos da equação de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - N^2)y = 0$$

com $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{N > 0}$.

Uma solução é a tradicional para $N > 0$,

$$J_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(N+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(N+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+2k}$$

No entanto, é comum definirmos $1/\Gamma(-m) = 0$ se $m \in \mathbb{N}$, e ao escrevermos a fórmula para $J_{-N}(x)$, obtemos $J_{-N}(x) = (-1)^N J_N(x)$, ou seja, não é uma segunda solução linearmente independente da primeira.

Daí, o procedimento é aquele envolvendo um logaritmo, e chegamos á fórmula

$$K_N(x) = J_N(x)\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

como uma segunda solução independente da primeira.

Apêndice A. Números Complexos e Funções Analíticas Complexas

Coletamos aqui apenas algumas noções básicas de números complexos e de fuções analíticas complexas, o suficiente para tratarmos das equações diferenciais.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ estende o dos números reais $\mathbb{R}$ juntando as raízes quadradas de números reais negativos e pode ser realizado como $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, em que os pares ordenados (a, b) representam o que se espera de algo como $a + b\sqrt{-1}$. Reservamos a letra i para $\sqrt{-1}$. Definimos as operações $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, que correspondem ao que se espera de $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (c + d)i$ e $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bd\, i^2 + (ad + bc)i = (ac - bd) + (ad + bc)i$. O conjugado de $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$; o módulo de $z = a + bi$ é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$; observe que $1/z = 1/(a + bi) = (a - bi)(a^2 + b^2) = z/|z|^2$. Os números reais são incluídos nos complexos pela identificação $a = a + 0i$.

Um resultado importante, mas um pouco difícil de ser demonstrado é o

Teorema 12 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** Todo polinômio de coeficientes complexos $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (com $n > 0$ e $a_n \neq 0$) pode ser fatorado como produto de n termos lineares $p(x) = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - c_k)$, com $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ (não necessariamente distintos).

Como consequência simples, mas útil, temos

Teorema 13 (Raízes Complexas de Polinômios Reais)**.** Todo polinômio de coeficientes reais $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (com $n > 0$ e $a_n \neq 0$) pode ser fatorado como produto de n termos lineares $p(x) = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - c_k)$, com $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, de modo que se alguma raiz $c_j = a_j + b_j i$ for complexa e não real e de multiplicidade $m_j > 0$, então existe uma raiz $c_k = a_j - b_j i$ de mesma multiplicidade m_j.

Observação 9. Os polinômios de Taylor da função real e^x, com resto de Lagrange, em um intervalo $[-a, a]$, $a > 0$ satisfazem

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x), \quad \text{com} \quad |E_n(x)| = \frac{e^{\bar{x}}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^a|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como $|E_n(x)| \to 0$, se $n \to \infty$, isto significa que a sequência desses polinômios converge uniformemente para a função e^x, no intervalo $[-a, a]$ (isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, que só depende de ε e não de x, tal que, para todo $x \in [-a, a]$ e todo $n \geq n_0$, $|e^x - \sum_{k=0}^{n} x^k/k!| < \varepsilon$).

Esse limite também faz sentido se tomarmos $x = z \in \mathbb{C}$, com $|z| \leq a$, e podemos definir a **exponencial complexa** e^z como tal limite; e ele herda a propriedade $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Em particular, se $z = bi$, temos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(b^k i^k)}{k!} = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{((-1)^j b^{2j})}{(2j)!} + i \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{((-1)^j b^{2j+1})}{(2j+1)!},$$

(quebrou como soma de polinômio de Taylor de $\cos b$ mais $i = \sqrt{-1}$ vezes polinômio de Taylor de $\operatorname{sen} b$) o que implica que $e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$. Assim, $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$.

Exemplo 39. Podemos também resolver equações $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2) = 0$ fatorando $\left(\frac{d}{dx} - (a + bi)\right)\left(\frac{d}{dx} - (a - bi)\right) y = 0$, com a solução geral $y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x}$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Para que a solução seja uma função real, devemos impor que $y(x) = \overline{y(x)}$, ou seja, $C_2 = \overline{C}_1$, ou, se $C_1 = c_1 - c_2 i$, $y(x) = 2c_1 e^{ax}\cos(bx) + 2c_2 e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$.

Apêndice B. Exponencial de Matrizes e Sistemas Lineares

A ideia de estender a função exponencial aos números complexos também pode ser feita para matrizes quadradas.

Uma noção de *módulo* de número complexo estende-se às matrizes de maneira análoga: $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$, se a matriz A tiver entradas $a_{i,j}$ (reais ou até complexas).

Assim, faz sentido definir $\exp A = e^A$ como o limite para $n \to \infty$ de $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$.

CUIDADO: nem sempre vale a igualdade $e^{A+B} = e^A e^B$. Valerá somente nos casos em que A e B comutarem, $AB = BA$.

Se P for matriz invertível, então é simples verificar que $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$. Isto facilita o cálculo de e^A. Usamos a forma de Jordan da matriz A, que é uma matriz $B = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_m)$, com blocos quadrados $B_1, \ldots B_m$ na diagonal, e zeros no resto, cada bloco da forma $B_j = \lambda_j I_j + N_j$, I_j uma matriz identidade $m_j \times m_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ e N_j uma matriz quadrada de ordem $m_j \times m_j$, com entradas $n_{i+1,1} = 1$ (primeira diagonal abaixo da principal) e zeros no resto.

Observe que $\exp B = \operatorname{diag}(\exp B_1, \ldots, \exp B_m)$.

Calculemos a exponencial de cada bloco, $\exp B_j$.

Como $\lambda_j I_j$ comuta com N_j, temos que $\exp(\lambda_j I_j + N_j) = e^{\lambda_j} I_j e^{N_j}$. Como $N_j^{m_j} = \mathbf{0}$ (a matriz nula),

$$\exp N_j = \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{N_j^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{1}{2!} & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{(m_j-1)!} & \dfrac{1}{(m_j-2)!} & \dfrac{1}{(m_j-3)!} & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\dfrac{d}{dx}\exp(A(x-x_0)) = A\exp(A(x-x_0))$, vemos que resolvemos o sistema $Y' = AY$, dada a condição inicial $Y(x_0) = C$ (um vetor coluna), com $Y = \exp(A(x-x_0))C$.

Para resolver um sistema não homogêneo $Y' = AY + B(x)$, dada a condição inicial $Y(x_0) = C$, temos

$$Y = \exp(Ax)C + \exp(Ax)\int_{x_0}^{x} \exp(-At)B(t)\,dt.$$

Exemplo 40. Resolveremos o sistema $Y' = AY$, com

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \end{pmatrix}$$

B.1. **Algoritmo de Putzer.** E. J. Putzer publicou em [8] um algoritmo relativamente simples para calcular a exponencial de uma matriz quadrada sem ter que obter a forma normal de Jordan. Ele depende da fatoração do polinômio característico da matriz, $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n, que é a ordem de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Definição 5. Dada a matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}$, seja $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \sum_{k=n}^{n-1} c_k \lambda^k$ seu polinômio característico, e seja $z(t)$ a solução da equação diferencial linear $z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)} = 0$, dadas as condições iniciais $z^{(n-1)}(0) = 1$ e $z^{(k)}(0) = 0$, para $0 \le k \le n-2$ (isso depende apenas de fatorar o polinômio característico de A, $p(\lambda)$).

Sejam $Z(t)$, C e $Q(t)$ as matrizes

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ c_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q(t) = C\,Z(t) = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \\ q_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Teorema 14. Com as definições acima, temos

$$\boxed{e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) A^k.}$$

Demonstração. Escrevemos $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n t^n/n!$ e, como $p(A) = A^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j = 0$, obtemos que $e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t) A^j$.

Sabemos que $[e^{At}]' = Ae^{At}$, ou seja

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} q_j'(t) A^j - \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t) A^{j+1} = q_0' I + \sum_{j=1}^{n-1} [q_j' - q_{j-1}] A^j$$

Substituímos $A^n = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k$ e obtemos

$$(q_0'(t) + c_0 q_{n-1}(t))A^0 + \sum_{k=1}^{n-1}[q_k'(t) + c_k q_{n-1}(t) - q_{k-1}(t)]A^k = 0$$

Uma condição suficiente para que essa igualdade ocorra é que as funções $q_j(t)$ satisfaçam o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{gathered} q_0'(t) - c_0 q_{n-1}(t) = 0 \\ q_k'(t) + c_k q_{n-1}(t) - q_{k-1}(t) = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1) \end{gathered}$$

com as condições iniciais $q_0(0) = 1$ e $q_k(0) = 0$, se $1 \leq k \leq n-1$, pois $e^{0A} = I$.

Chamamos $q_{n-1}(t) = z(t)$ e derivamos até a ordem $k-1$ a equação $q_k'(t) + c_k q_{n-1}(t) - q_{k-1}(t) = 0$, para $1 \leq k \leq n-1$ e substituímos os termos obtidos, para chegarmos à equação diferencial linear

$$z^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^{(j)} = 0,$$

com as condições iniciais a serem determinadas a seguir.

Observe que da equação $q_{n-1}' + c_{n-1}q_{n-1} - q_{n-2} = 0$, obtemos $q_{n-2} = c_{n-1}z + z'$; da equação $q_{n-2}' + c_{n-2}q_{n-1} - q_{n-3} = 0$, obtemos que $q_{n-3} = c_{n-2}q_{n-2} + q_{n-2}' = c_{n-2}z + c_{n-1}z' + z''$, e assim por diante, do que obtemos que $Q = CZ$, e as condições iniciais procuradas são $z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-2}(0) = 0$ e $z^{(n-1)}(0) = 1$. □

Temos uma segunda fórmula.

Teorema 15. Fixada uma indexação λ_j, $(1 \leq j \leq n)$ dos autovalores da matriz A, repetindo os valores conforme suas multiplicidades, temos

$$\boxed{e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) P_j,}$$

onde $P_0 = I$, $P_j = \prod_{k=1}^{j}(A - \lambda_j I)$, $1 \leq j \leq n$, e $r_1(t)$, $\ldots$, $r_n(t)$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1 \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \ (j = 2, \ldots, n) \end{cases}$$

com as condições iniciais $r_1(0) = 1$, e $r_j(0) = 0$, $2 \leq j \leq n$.

Demonstração. Como o caso em que $n = 1$ podemos resolver diretamente a exponencial, podemos assumir que $n \geq 2$. Por conveniência de exposição, definimos $r_0(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, podemos escrever $r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j$, para $1 \leq j \leq n$.

Seja $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j$. Observe que $\Phi(0) = P_0 = I$. Daí,

$$\Phi'(t) - \lambda_n\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1}[r'_{j+1}(t) - \lambda_n r_{j+1}(t)]P_j = \sum_{j=0}^{n-1}[r_j(t) + \lambda_{j+1}r_{j+1} - \lambda_n r_{j+1}]P_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2}[P_{j+1} + (\lambda_{j+1} - \lambda_n)P_j]r_{j+1}$$

Observe que $P_n = p(A) = 0$ para o polinômio característico de A, $p(\lambda)$, e se $j = n-1$, o termo correspondente na somatória se anula.

Como $P_{j+1} = (A - \lambda_{j+1}I)P_j$, temos que

$$\Phi' - \lambda_n\Phi = \sum_{j=0}^{n-2}[(A - \lambda_{j+1}I)P_j + (\lambda_{j+1} - \lambda_n)P_j]r_{j+1} = (A - \lambda_n I)\sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}P_j =$$

$$= (A - \lambda_n)[\Phi - r_n P_{n-1}] = (A - \lambda_n I)\Phi - r_n \underbrace{P_n}_{=0} = (A - \lambda_n)\Phi$$

Portanto $\Phi'(t) = A\phi(t)$ e, como $\Phi(0) = I$, obtemos que $\Phi(t) = e^{At}$. □

Referências

[1] Garrett Birkhoff, Gian-Carlo Rota. *Ordinary Differential Equations*, 4ª ed., John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1989.

[2] Earl A. Coddington, Robert Carlson. *Ordinary Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, EUA, 1997.

[3] Leonhard Euler. "De integratione aequationum differentialium" (On the integration of differential equations) *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1763, pp. 3-63 Original em latim disponível em E269 (acesso em agosto de 2016). Neste artigo, Euler trata do fator integrante, das equações a coeficientes homogêneos e da Equação de Riccati, entre outras.

[4] Morris W. Hirsch e Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Nova Iorque, 1974.

[5] Edward L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1944.

[6] Donald L. Kreider, Robert G. Kuller e Donald R. Ostberg, *Equações Diferenciais*, tradução de Elza Gomide, Editora Edgard Blucher Ltda. e Editora da Universidade de São Paulo, 1972.

[7] Jalil Manafian, Mahnaz Paknezhad. Analytical Solutions for the Blacl-Scholes Equation. *Applications and Applied Mathematics*, Vol. 12, No. 2 (2017), 843–852. Disponível neste local (acesso em outubro de 2021).

[8] E. J. Putzer. Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 71, No. 1 (1966), 2–7.

[9] Jacopo Riccati, "Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus"(Observations regarding differential equations of the second order), *Actorum Eruditorum, quae Lipsiae publicantur, Supplementa*, 8 (1724): 66-73. Tradução em inglês aqui (acesso em outubro de 2021).

[10] Balthasar van der Pol. On relaxation-oscillations, *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci.*, 2(7), 978–992 (1926).