

1ª Questão: (2,5) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + (y-1)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ L & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

(a) Determine $L \in \mathbb{R}$ tal que f é contínua em $(0, 1)$.

(b) Sendo L o valor encontrado no item a), determine as derivadas parciais no ponto $(0, 1)$ e verifique se f é diferenciável em $(0, 1)$.

Resolução.

(a) Para que f seja contínua em $(0, 1)$, é preciso que o valor de $f(0, 1)$ seja igual a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$. Calculando esse limite, obtemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2}{x^2 + (y-1)^2} \cdot x.$$

Usando o corolário do Teorema do Confronto, esse limite é zero já que $\frac{x^2}{x^2 + (y-1)^2} \leq 1$ para todo $(x, y) \neq (0, 1)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x = 0$. Concluimos então que basta fazer $L = 0$ para que f seja contínua em $(0, 1)$.

(b) Considerando $f(0, 1) = 0$, vamos usar a definição para calcular as derivadas parciais no ponto $(0, 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 1) - f(0, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2 \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 1+h) - f(0, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2 \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

A função f é diferenciável em $(0, 1)$ se e somente se o limite abaixo for zero.

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, 1+k) - f(0, 1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \cdot k}{(h^2 + k^2)^{1/2}} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2 + k^2} - h}{(h^2 + k^2)^{1/2}} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Mas esse limite não é zero pois podemos encontrar um caminho contínuo passando por $(0, 0)$ sobre o qual o limite não vale zero. Considere a semirreta $h = k$ com $h \geq 0$; vamos calcular o limite acima sobre essa semirreta.

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ h=k>0}} \frac{hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = 2^{-3/2} \neq 0.$$

Já que o limite não é zero, podemos afirmar que f não é diferenciável em $(0, 1)$.

2ª Questão: (2,0) Seja $f(u, v) = u^3 - uv^2 + 6v$, com $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$. Suponha que (x_0, y_0) é ponto crítico de $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, $u(x_0, y_0) = 1$ e $v(x_0, y_0) = 2$.

Sabendo que $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = -1$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$, calcule $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Resolução

Sendo f , u e v funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, sabemos que g também é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$ e podemos usar a regra da cadeia.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Nas igualdades acima podemos realizar as seguintes substituições.

- $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, já que (x_0, y_0) é ponto crítico de g ;
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$, $u(x_0, y_0) = 1$ e $v(x_0, y_0) = 2$ são dados do problema;
- $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = -1$, já que $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 3u^2 - v^2$;
- $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 2$, já que $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = -2uv + 6$.

Obtemos assim as duas igualdades abaixo.

$$0 = (-1)(-1) + 2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ e } 0 = (-1) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + 2$$

Concluimos que $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -1/2$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 2$.

MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
Escola Politécnica - Prova Substitutiva - 01/12/2014
GABARITO

Turma A

3ª Questão: (2,5) Seja γ uma curva cuja imagem é o conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + 2z^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

(a) Dê a equação da reta tangente a γ no ponto $(0, 1, -1)$.

(b) Determine os pontos de C para os quais a reta tangente a γ é paralela ao plano xy .

Solução: Sejam $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Um vetor tangente a γ no ponto (x, y, z) é dado por $v(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \wedge \nabla g(x, y, z) = (2x, -2y, 4z) \wedge (2x, 2y, 2z) = (-12yz, 4xz, 8xy)$.

noindent (a) A equação vetorial da reta tangente a γ no ponto $(0, 1, -1)$ é então

$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda v(0, 1, -1) = (0, 1, -1) + \lambda(12, 0, 0).$$

(b) Os pontos de C são as soluções do sistema
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

A reta tangente será paralela ao plano xy se a componente de $v(x, y, z)$ na direção do eixo Oz for nula, ou seja, se $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Se $x = 0$, temos o sistema para y e z

$$\begin{cases} -y^2 + 2z^2 = 1 & (1) \\ y^2 + z^2 = 2 & (2) \end{cases} \quad \text{Somando as equações (1) e (2), obtemos } 3z^2 = 3 \Leftrightarrow z =$$

± 1 . Substituindo na equação (3) segue que $y^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow z = \pm 1$. Portanto, as soluções com $x = 0$ são $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -1, 1)$ e $(0, -1, -1)$.

Se $y = 0$, obtemos o sistema em x e z

$$\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + z^2 = 2 & (2) \end{cases} \quad \text{Subtraindo as equações (1) e (2), obtemos } z^2 = -1 \text{ e o}$$

sistema não tem solução real.

Os pontos procurados são, portanto,

$$(0, 1, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1) \text{ e } (0, -1, -1).$$

4ª Questão: (3,0) Considere a função $f(x, y, z) = x - 2y + z^2$, e a região $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 2z = 0 \text{ e } 2x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$. A função f tem pontos de máximo e mínimo na região R ? Caso afirmativo, encontre-os.

Solução: A função $f(x, y, z) = x - 2y + z^2$ é contínua em $\mathbb{R}^3$ e o conjunto R é fechado e limitado, portanto compacto. Segue, do Teorema de Weierstrass, que f possui pontos de máximo e pontos de mínimo em R .

Como $\mathbb{R}^3$ é aberto e f, g e h são funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$, segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, que nos pontos (x, y, z) de máximo e mínimo de f em R , o conjunto de vetores $\{\nabla f(x, y, z), \nabla g(x, y, z), \nabla h(x, y, z)\}$ será linearmente dependente, ou seja

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2z \\ 1 & -2 & 2 \\ 4x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2z - 2)(y + 4x) = 0.$$

Portanto as coordenadas (x, y, z) dos extremantes de f em R satisfazem o sistema

$$\begin{cases} (z - 1)(y + 4x) = 0 & (1) \\ x - 2y + 2z = 0 & (2) \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 & (3) \end{cases}$$

Da equação (1), obtemos $z = 1$ ou $y = -4x$.

No caso $z = 1$, substituindo na equação (2), obtemos $x - 2y = -2 \Leftrightarrow x = (2y - 2)$. Substituindo na equação (3), obtemos então $2(4y^2 - 8y + 4) + y^2 = 9 \Leftrightarrow 9y^2 - 16y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = \frac{16}{9}$ e obtemos os candidatos a extremantes: $(-2, 0, 1)$ e $(\frac{14}{9}, \frac{16}{9}, 1)$.

No caso $y = -4x$, substituindo na equação (2), obtemos $x + 8x + 2z = 0 \Leftrightarrow 9x = -2z \Leftrightarrow z = -\frac{9}{2}x$. Substituindo na equação (3), obtemos então $2x^2 + 16x^2 + \frac{81}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow 18x^2 + \frac{81}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow 17x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{17}}$ e obtemos os candidatos a extremantes:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}}\right) \text{ e } \left(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}\right).$$

Comparando, obtemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}}\right) &= \frac{18}{\sqrt{17}} + \frac{81}{17}, \\ f\left(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}\right) &= \frac{-18}{\sqrt{17}} + \frac{81}{17}, \\ f(-2, 0, 1) &= -1, \\ f\left(\frac{14}{9}, \frac{16}{9}, 1\right) &= -1. \end{aligned}$$

$$\text{Agora } \frac{18}{\sqrt{17}} < \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = \frac{81}{18} < \frac{81}{17}. \text{ Portanto } 0 < f\left(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}\right) < f\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}}\right).$$

Concluimos que $(-2, 0, 1)$ e $(\frac{14}{9}, \frac{16}{9}, 1)$ são pontos de mínimo e $(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}})$ é ponto de máximo de f em R .