Turma A

1ª Questão: (2,5) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ L & \text{se} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

(a) Determine $L \in \mathbb{R}$ tal que f é contínua em $(1,0)$.

(b) Sendo L o valor encontrado no ítem a), determine as derivadas parciais no ponto $(1,0)$ e verifique se f é diferenciável em $(1,0)$.

Resolução.

(a) Para que f seja contínua em $(1,0)$, é preciso que o valor de $f(1,0)$ seja igual a $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$. Calculando esse limite, obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2}{(x-1)^2+y^2} \cdot y.$$

Usando o corolário do Teorema do Confronto, esse limite é zero já que $\frac{y^2}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$ para todo $(x,y) \neq (1,0)$e $\lim_{(x,y)\to(1,0)} y = 0$. Concluímos então que basta fazer $L = 0$ para que f seja contínua em $(1,0)$.

(b) Considerando $f(1,0) = 0$, vamos usar a definição para calcular as derivadas parciais no ponto $(1,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2 \cdot h} = 1.$$

A função f é diferenciável em $(1,0)$ se e somente se o limite abaixo for zero.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h,k) - f(1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot k}{(h^2+k^2)^{1/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{k^3}{h^2+k^2} - k}{(h^2+k^2)^{1/2}} =$$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$.

Mas esse limite não é zero pois podemos encontrar um caminho contínuo passando por $(0,0)$ sobre o qual o limite não vale zero. Considere a semirreta $h = k$ com $h \geq 0$; vamos calcular o limite acima sobre essa semirreta.

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ h=k>0}} \frac{kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{(2h^2)3/2} = 2^{-3/2} \neq 0.$$

Já que o limite não é zero, podemos afirmar que f não é diferenciável em $(1,0)$.

2ª Questão: (2,0) Seja $f(u,v) = u^3 - uv^2 + 6v$, com $u(x,y)$ e $v(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$. Suponha que (x_0,y_0) é ponto crítico de $g(x,y) = f(u(x,y),v(x,y))$, $u(x_0,y_0) = 1$ e $v(x_0,y_0) = 2$.

Sabendo que $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = -1$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$, calcule $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Resolução

Sendo f, u e v funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, sabemos que g também é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$ e podemos usar a regra da cadeia.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Nas igualdades acima podemos realizar as seguintes substituições.

- $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, já que (x_0,y_0) é ponto crítico de g;

- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$, $u(x_0,y_0) = 1$ e $v(x_0,y_0) = 2$ são dados do problema;

- $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = -1$, já que $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 3u^2 - v^2$;

- $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 2$, já que $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = -2uv + 6$.

Obtemos assim as duas igualdades abaixo.

$0 = (-1)(-1) + 2\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $0 = (-1)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + 2$

Concluímos que $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -1/2$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = 2$.

MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
Escola Politécnica - Prova Substitutiva - 01/12/2014
GABARITO

Turma A

3ª Questão: (2,5) Seja γ uma curva cuja imagem é o conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + 2z^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 2.\}$

(a) Dê a equação da reta tangente a γ no ponto $(0, 1, -1)$.

(b) Determine os pontos de C para os quais a reta tangente a γ é paralela ao plano xy.

Solução: Sejam $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Um vetor tangente a γ no ponto (x, y, z) é dado por $v(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \wedge \nabla g(x, y, z) = (2x, -2y, 4z) \wedge (2x, 2y, 2z) = (-12yz, 4xz, 8xy)$.

noindent (a) A equação vetorial da reta tangente a γ no ponto $(0, 1, -1)$ é então

$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda v(0, 1, -1) = (0, 1, -1) + \lambda(12, 0, 0).$$

(b) Os pontos de C são as soluções do sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2z^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2. \end{cases}$

A reta tangente será paralela ao plano xy se a componente de $v(x, y, z)$ na direção do eixo Oz for nula, ou seja, se $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Se $x = 0$, temos o sistema para y e z

$\begin{cases} -y^2 + 2z^2 &= 1 \quad (1) \\ y^2 + z^2 &= 2. \quad (2) \end{cases}$ Somando as equações (1) e (2), obtemos $3z^2 = 3 \Leftrightarrow z = \pm 1$. Substituindo na equação (3) segue que $y^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow z = \pm 1$. Portanto, as soluções com $x = 0$ são $(0, 1, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1)$ e $(0, -1, -1)$.

Se $y = 0$, obtemos o sistema em x e z

$\begin{cases} x^2 + 2z^2 &= 1 \quad (1) \\ x^2 + z^2 &= 2. \quad (2) \end{cases}$ Subtraindo as equações (1) e (2), obtemos $z^2 = -1$ e o sistema não tem solução real.

Os pontos procurados são, portanto,

$$(0, 1, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1) \text{ e } (0, -1, -1).$$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,0) Considere a função $f(x,y,z) = x - 2y + z^2$, e a região $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 2z = 0 \text{ e } 2x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$. A função f tem pontos de máximo e mínimo na região R? Caso afirmativo, encontre-os.

Solução: A função $f(x,y,z) = x - 2y + z^2$ é contínua em $\mathbb{R}^3$ e o conjunto R é fechado e limitado, portanto compacto. Segue, do Teorema de Weirstrass, que f possui pontos de máximo e pontos de mínimo em R.

Como $\mathbb{R}^3$ é aberto e f, g eh são funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$, segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, que nos pontos (x,y,z) de máximo e mínimo de f em R, o conjunto de vetores $\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\}$ será linearmente dependente, ou seja

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2z \\ 1 & -2 & 2 \\ 4x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2z-2)(y+4x) = 0.$$

Portanto as coordenadas (x,y,z) dos extremantes de f em R satisfazem o sistema

$$\begin{cases} (z-1)(y+4x) & = & 0 & (1) \\ x - 2y + 2z & = & 0 & (2) \\ 2x^2 + y^2 + z^2 & = & 9 & (3) \end{cases}$$

Da equação (1), obtemos $z = 1$ ou $y = -4x$.
No caso $z = 1$, substituindo na equação (2), obtemos $x - 2y = -2 \Leftrightarrow x = (2y - 2)$. Substituindo na equação (3), obtemos então $2(4y^2 - 8y + 4) + y^2 = 8 \Leftrightarrow 9y^2 - 16y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = \frac{16}{9}$ e obtemos os candidatos a extremantes: $(-2, 0, 1)$ e $(\frac{14}{9}, \frac{16}{9}, 1)$.

No caso $y = -4x$, substituindo na equação (2), obtemos $x + 8x + 2z = 0 \Leftrightarrow 9x = -2z \Leftrightarrow z == -\frac{9}{2}x$. Substituindo na equação (3), obtemos então $2x^2 + 16x^2 + \frac{81}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow 18x^2 + \frac{81}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow 17x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{17}}$ e obtemos os candidatos a extremantes:

$$(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}}) \text{ e } (\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}.$$

Comparando, obtemos
$f(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}}) = \frac{18}{\sqrt{17}} + \frac{81}{17}$,
$f(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}) = \frac{-18}{\sqrt{17}} + \frac{81}{17}$,
$f(-2, 0, 1) = -1$,
$f(\frac{14}{9}, \frac{16}{9}, 1) = -1$.

Agora $\frac{18}{\sqrt{17}} < \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = \frac{81}{18} < \frac{81}{17}$. Portanto $0 < f(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}) < f(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}})$.

Concluímos que $(-2, 0, 1)$ e $(\frac{14}{9}, \frac{16}{9}, 1)$ são pontos de mínimo e $(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{\sqrt{17}})$ é ponto de máximo de f em R.