MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2014 - Primeira Prova - 01/09/2014

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

a) Usando o sistema de coordenadas abaixo:

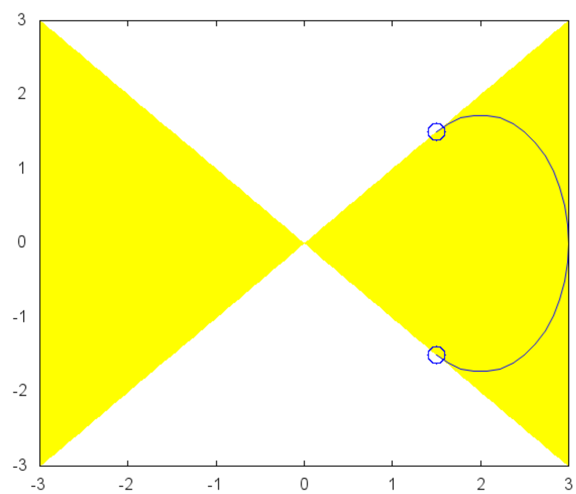
i) (1,0) represente geometricamente o domínio de f;

ii) (1,5) faça um esboço da curva de nível $\mathcal{C}$ que passa pelo ponto $(3,0)$.

b) (1,5) Encontre um intervalo I e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ contínua cuja imagem é $\mathcal{C}$.

Solução.

a) O domínio de f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)(x+y) > 0\}$, o qual corresponde à região em amarelo na figura abaixo. A curva de nível de f que passa pelo ponto $(3,0)$ é a de nível 1. Tal curva é o arco de elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + \dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3/2\}$, o qual encontra-se esboçado em azul na figura abaixo.



b) A referida curva de nível pode ser parametrizada por $\gamma : (-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (2 + \cos t, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t)$.

Questão 2. Considere a curva $\gamma(t) = (\cos t, -\text{tg}^2 t)$, com $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

a) (1,0) Mostre que a imagem de γ está contida numa curva de nível da função $f(x,y) = y + \dfrac{1}{x^2} + 1$ e determine o nível.

b) (1,5) Esboce a imagem de γ indicando o sentido do percurso.

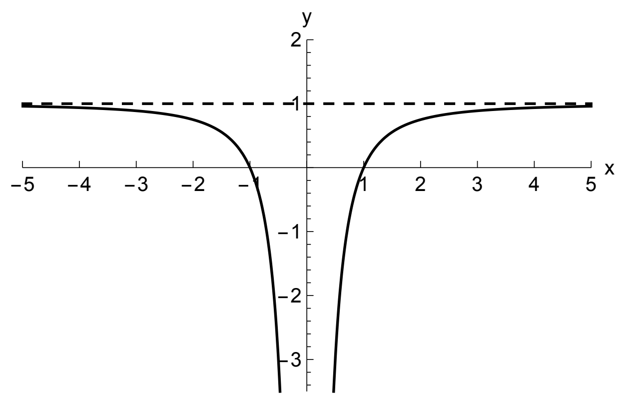
Solução: a) Para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ temos que

$$f(\gamma(t)) = -\text{tg}^2 t + \frac{1}{\cos^2 t} + 1 = -\text{tg}^2 t + \sec^2 t + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Logo, a imagem de γ está contida na curva de nível $c = 2$ de f.

b) Primeiramente, esboçamos a curva de nível $c = 2$ de f:

$$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow y + \frac{1}{x^2} + 1 = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x^2} + 1.$$



Curva de nível $c = 2$ de f

Agora, note que quando t varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$, $x(t) = \cos t$ varia de 1 a 0, enquanto que $y(t) = -\text{tg}^2 t$ varia de 0 a $-\infty$. Portanto:

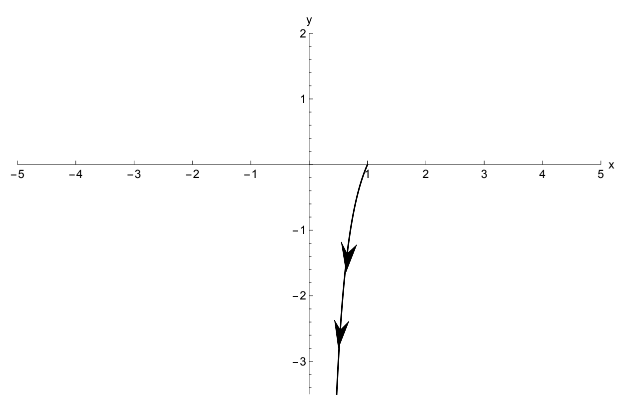


Imagem de γ

Questão 3. Para cada uma das funções abaixo determine L, caso exista, para que a função seja contínua em $(0,0)$.

a) (2,0) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4}\operatorname{sen} x & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução:

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4}}_{\text{limitada}} \underbrace{\operatorname{sen x}}_{\to 0} = 0$, temos que, se $L = 0$, então f é contínua em $(0,0)$.

Observação: $g(x,y) = \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4}$ é uma função limitada, pois:

$$0 \leq (x^4 - y^2)^2 = x^8 - 2x^4y^2 + y^4 = x^8 + y^4 - 2x^4y^2$$

$$0 \leq 2x^4y^2 \leq x^8 + y^4.$$

Ou seja, $0 \leq \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4} \leq \dfrac{1}{2}$, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

b) (1,5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2} & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução:

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}$. Temos que $Dom_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Considere as curvas $\gamma_1(t) = (0,t)$ e $\gamma_2(t) = (t,t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Temos que $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{0+t^2} = 0$ e $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^4}{t^4+0} = 1$.

Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, ou seja, não existe $L \in \mathbb{R}$ que torne f contínua em $(0,0)$.