MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

2º semestre de 2014 - Primeira Prova - 01/09/2014

Questão 1. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2y-3}{\sqrt{y^2-x^2}}$.

a) Usando o sistema de coordenadas abaixo:

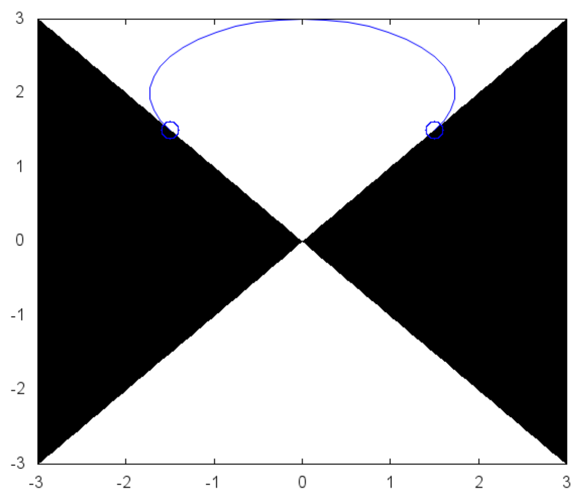
i) (1,0) represente geometricamente o domínio de f;

ii) (1,5) faça um esboço da curva de nível $\mathcal{C}$ que passa pelo ponto $(0,3)$.

b) (1,5) Encontre um intervalo I e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ contínua cuja imagem é $\mathcal{C}$.

Solução.

a) O domínio de f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-x)(y+x) > 0\}$, o qual corresponde à região em branco na figura abaixo. A curva de nível de f que passa pelo ponto $(0,3)$ é a de nível 1. Tal curva é o arco de elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + (y-2)^2 = 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 3/2\}$, o qual encontra-se esboçado em azul na figura abaixo.



b) A referida curva de nível pode ser parametrizada por $\gamma : (-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\sqrt{3}\cos t, 2 + \operatorname{sen} t)$.

Questão 2. Considere a curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{tg}^2 t)$, com $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

a) (1,0) Mostre que a imagem de γ está contida numa curva de nível da função $f(x,y) = y - \dfrac{1}{x^2} + 2$ e determine o nível.

b) (1,5) Esboce a imagem de γ indicando o sentido do percurso.

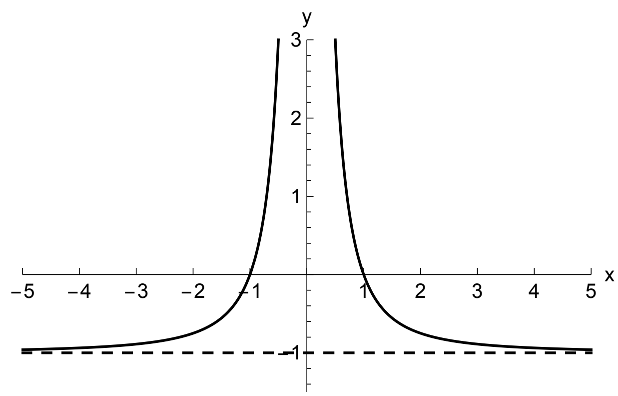
Solução: a) Para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ temos que

$$f(\gamma(t)) = \operatorname{tg}^2 t - \frac{1}{\cos^2 t} + 2 = \operatorname{tg}^2 t - \sec^2 t + 2 = -1 + 2 = 1.$$

Logo, a imagem de γ está contida na curva de nível $c = 1$ de f.

b) Primeiramente, esboçamos a curva de nível $c = 1$ de f:

$$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow y - \frac{1}{x^2} + 2 = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2} - 1.$$



Curva de nível $c = 1$ de f

Agora, note que quando t varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$, $x(t) = \cos t$ varia de 1 a 0, enquanto que $y(t) = \operatorname{tg}^2 t$ varia de 0 a $+\infty$. Portanto:

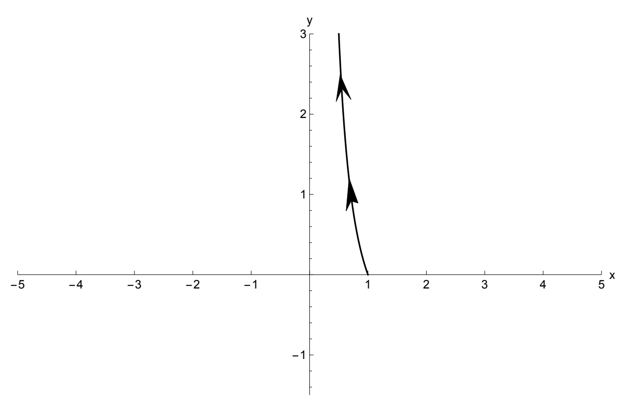


Imagem de γ

Questão 3. Para cada uma das funções abaixo determine L, caso exista, para que a função seja contínua em $(0,0)$.

a) (2,0) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^8}\operatorname{sen} x & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução:

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2y^4}{x^4+y^8}}_{\text{limitada}} \underbrace{\operatorname{sen x}}_{\to 0} = 0$, temos que, se $L = 0$, então f é contínua em $(0,0)$.

Observação: $g(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^8}$ é uma função limitada, pois:

$$0 \leq (x^2-y^4)^2 = x^4 - 2x^2y^4 + y^8 = x^4 + y^8 - 2x^2y^4$$

$$0 \leq 2x^2y^4 \leq x^4 + y^8.$$

Ou seja $0 \leq \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^8} \leq \dfrac{1}{2}$, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

b) (1,5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução:

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Temos que $Dom_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Considere as curvas $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (t,t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Temos que $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{0+t^2} = 0$ e $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+0} = 1$.

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, ou seja, não existe $L \in \mathbb{R}$ que torne f contínua em $(0,0)$.